



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Un approccio variazionale
alle singularità topologiche
in dimensione due

Relatore:
Prof.
Marcello Ponsiglione

Candidato:
Silvio Fanzon
matricola 1216469

Sessione Invernale
Anno Accademico 2013-2014
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

Indice

Introduzione	iii
1 Grado topologico e lifting	1
1.1 Grado topologico per funzioni continue	1
1.2 Lifting in $C(\Omega; S^1)$ con Ω semplicemente connesso	7
1.3 Lifting in $C(\Gamma; S^1)$	10
1.4 Gli spazi $C_g(\Omega; S^1)$, $C_g(\Omega_0; S^1)$ e $C_g(\Omega_\varepsilon; S^1)$	14
1.5 Lifting in $C(\Omega_\varepsilon; S^1)$	17
1.6 Grado topologico per funzioni $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$	20
1.7 Lifting in $H^1(\Omega; S^1)$ con Ω semplicemente connesso	23
1.8 Lifting in $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$	30
1.9 Gli spazi $H_g^1(\Omega; S^1)$ e $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$	31
1.10 Lifting in $\dot{H}^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$	37
2 Metodi del calcolo delle variazioni	40
2.1 Metodo diretto	40
2.2 Γ -convergenza	42
3 Funzioni armoniche a valori in S^1	46
3.1 Problema con dato al bordo	46
3.2 Il caso $d = 0$	46
3.3 Il caso $d \neq 0$	48
3.4 Analisi asintotica	55
3.5 Esistenza e unicit� per il problema ausiliario	60
3.6 Stima ellittica	66
3.7 Problema senza dato al bordo	70
4 Analisi per Γ-convergenza	72
4.1 Problema senza dato al bordo	75
4.2 La giusta topologia su $X(\Omega)$	76
4.3 Risultato di Γ -convergenza senza dato al bordo	84
4.4 Ball construction	90
4.5 Stima dal basso dell'energia	93
4.6 Equicoercivit� e disuguaglianza di Γ -lim inf	95
4.7 Risultato di Γ -convergenza con dato al bordo	102
4.8 Esistenza dei minimi di F_ε^g ad ε fissato	109
5 Conclusioni: Γ-convergenza all'ordine 1	115

A	Appendice	117
A.1	Spazi di funzioni regolari	117
A.2	Risultati di Analisi Funzionale	118
A.3	Teoria della misura	119
A.4	Disuguaglianze di Poincaré	122
A.5	Problema di Neumann	124
	Bibliografia	126

Introduzione

In questa Tesi discutiamo un problema variazionale le cui soluzioni presentano delle singularità. Tali singularità sono strettamente connesse alla nozione di grado topologico di Brouwer. Il problema in questione è argomento di grande interesse in Fisica e in Scienza dei Materiali: esempi di fenomeni descritti in questo linguaggio sono i vortici nei superconduttori e le dislocazioni nei cristalli.

Più nel dettaglio, sia Ω un dominio limitato e semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 e $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ un dato al bordo regolare. Sia $d = \deg(g; \partial\Omega)$ il grado di Brouwer di g rispetto a $\partial\Omega$. Vogliamo minimizzare l'energia di Dirichlet tra le funzioni $u: \Omega \rightarrow S^1$ che prendono valore g su $\partial\Omega$. È ben noto che tali funzioni hanno energia finita se e soltanto se $d = 0$. Noi siamo interessati al caso $d \neq 0$, in cui il problema è mal posto. Una possibile approssimazione consiste nel rimuovere dei dischetti di raggio $\varepsilon > 0$ da Ω ottenendo un dominio Ω_ε che non è semplicemente connesso. In questo modo lo spazio $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ è non vuoto, qualunque sia il grado di g . Procediamo quindi a minimizzare l'energia di Dirichlet tra le funzioni in questo spazio per poi fare una analisi asintotica per $\varepsilon \rightarrow 0$. Questo modo di procedere è noto in letteratura come *core radius approach* (CRA). In alternativa si può sostituire la condizione che u assuma valori in S^1 con un procedimento di penalizzazione. Questo è l'approccio con i funzionali di Ginzburg-Landau, per la cui trattazione si rimanda alla monografia di H. Brezis, F. Bethuel e F. Helein [BBH1]. Nell'ambito del CRA risulta che l'energia dei minimi si concentra attorno ai buchi di Ω_ε e diverge come $d |\log \varepsilon|$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lo scopo di questa Tesi è di studiare il comportamento asintotico per $\varepsilon \rightarrow 0$ dell'energia, considerando la posizione dei buchi di Ω_ε come una variabile del problema. L'approccio naturale è per Γ -convergenza, ed è già stato utilizzato con successo per studiare analoghi problemi con il formalismo di Ginzburg-Landau, per esempio in [Sa], [J], [JS] e [AP]. Tuttavia a nostra conoscenza non è presente in letteratura un approccio autocontenuto per Γ -convergenza al CRA. L'obiettivo di questa Tesi consiste esattamente nel descrivere e sviluppare questo punto di vista.

Illustriamo il problema in maggiore dettaglio. Dato un dominio limitato e semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e un dato al bordo (regolare) $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ consideriamo il problema di minimo

$$\min_{u \in H_g^1(\Omega; S^1)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad (1)$$

dove

$$H_g^1(\Omega; S^1) := \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : |u| = 1 \text{ q.o. in } \Omega, u = g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

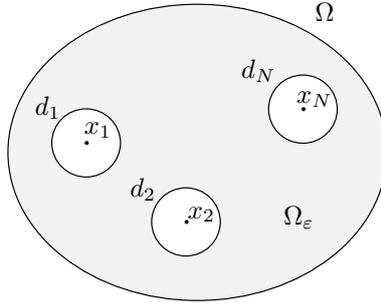


Figura 1: $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B_i}$

Si noti che l'unica differenza rispetto al problema classico delle funzioni armoniche è la richiesta che le funzioni assumano valori in S^1 . Un minimo di (1) si dice *funzione armonica a valori in S^1* . Il grado topologico di Brouwer del dato al bordo $d = \deg(g; \partial\Omega)$ gioca un ruolo chiave nell'analisi del problema (1). Si ha infatti che

$$H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset \quad \text{se e soltanto se} \quad d = 0. \quad (2)$$

Nel caso di $d = 0$ l'insieme dove si minimizza è non vuoto. Nel Teorema 3.1 proviamo che esiste un'unica soluzione regolare di (1). Concentriamoci sul caso $d \neq 0$ (non è restrittivo supporre che $d > 0$). Vogliamo formulare un problema che sia una buona approssimazione di (1) che in questo caso è mal posto. La letteratura propone due metodi differenti, che derivano dai motivi per cui lo spazio $H_g^1(\Omega; S^1)$ è vuoto. L'energia esplose perché stiamo richiedendo che valgano contemporaneamente le due condizioni:

1. il dominio Ω è semplicemente connesso;
2. u assume valori in S^1 .

Quindi è naturale approssimare (1) nei seguenti modi, ognuno dei quali fa cadere una delle condizioni invalidanti:

1. **Core radius approach (CRA)**: si rimuovono dei dischetti di raggio $\varepsilon > 0$ da Ω ottenendo un dominio Ω_ε che non è semplicemente connesso. In questo caso esistono funzioni $u: \Omega_\varepsilon \rightarrow S^1$ tali che $u = g$ su $\partial\Omega$ che hanno energia finita.
2. **Approccio con funzionali di Ginzburg-Landau**: si lascia cadere la richiesta che u assuma valori in S^1 , ma si introduce una penalizzazione nel funzionale energia, che forza i minimi ad avere valori vicino ad S^1 .

Entrambi gli approcci vengono studiati nella monografia di H. Brezis, F. Bethuel e F. Helein [BBH1] come possibili strategie per regolarizzare il problema (1).

In questa Tesi siamo interessati allo studio del CRA, che andiamo a descrivere. Si fissino N punti $x_i \in \Omega$, un raggio $\varepsilon > 0$ e si consideri il dominio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B_i}$ con $B_i = B_\varepsilon(x_i)$. I punti x_i e il raggio ε sono scelti in modo tale che Ω_ε sia ancora connesso e che abbia esattamente N buchi (si veda la Figura 1). Come conseguenza del Teorema 1.56 lo spazio funzionale

$$H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^2) : |u| = 1 \text{ q.o. in } \Omega_\varepsilon, u = g \text{ su } \partial\Omega\}$$

è non vuoto. Fissiamo ora N gradi $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ in modo che valga la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^N d_i = d. \quad (3)$$

in modo tale che sia non vuoto l'insieme delle funzioni di $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ che hanno grado d_i su ∂B_i

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N\}.$$

Pensiamo di approssimare il problema mal posto (1) con la famiglia di problemi dipendenti dal parametro $\varepsilon > 0$:

$$\min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2. \quad (4)$$

Nel Teorema 3.3 viene provato che questo problema ammette un'unica soluzione regolare u_ε . Inoltre per tale minimo vale lo sviluppo asintotico dell'energia dato dal Teorema 3.10

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \pi \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right) |\log \varepsilon| + W(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + o(\varepsilon) \quad (5)$$

con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)$. Il termine

$$\pi \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right) |\log \varepsilon|$$

nello sviluppo (5) si dice *core energy* ed è la parte di energia che esplode per $\varepsilon \rightarrow 0$. La parte di energia

$$W = W(\mathbf{x}, \mathbf{d})$$

che rimane una volta sottratta la parte (*core energy*) che esplode con $\varepsilon \rightarrow 0$ prende il nome di *energia rinormalizzata*. W è una quantità finita che non dipende dal parametro ε , ma solamente dalla posizione dei punti \mathbf{x} e dal valore dei gradi \mathbf{d} .

Ci proponiamo ora di ottimizzare l'energia (5) al variare di N , dei punti \mathbf{x} e dei gradi \mathbf{d} e di determinare un funzionale che descriva l'asintotica dei minimi per $\varepsilon \rightarrow 0$. Supponiamo dunque che $N \in \mathbb{N}$ sia arbitrario e che i punti x_1, \dots, x_N non siano fissati, ma liberi di muoversi all'interno di Ω . Supponiamo anche che i gradi $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ non siano assegnati, ma solamente soggetti al vincolo di compatibilità

$$\sum_{i=1}^N d_i = d = \deg(g; \partial\Omega).$$

Ci chiediamo quali siano le scelte ottimali di N , \mathbf{x} e \mathbf{d} in modo che l'energia

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \quad (6)$$

sia la minima possibile al tendere di $\varepsilon \rightarrow 0$. In altre parole ci stiamo chiedendo quale sia il comportamento asintotico per $\varepsilon \rightarrow 0$ dei minimizzanti di (6). Il

linguaggio giusto per affrontare questo tipo di questioni è la Γ -convergenza di De Giorgi.

Per descrivere tramite Γ -convergenza il problema, è opportuno rappresentare le singularità topologiche come somme finite di misure di Dirac a pesi interi:

$$X(\bar{\Omega}) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \bar{\Omega} \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Le singularità ammissibili per $\varepsilon > 0$ fissato sono il sottoinsieme di $X(\bar{\Omega})$ che denotiamo con $\mathcal{A}_\varepsilon^g$: una μ è ammissibile se soddisfa la condizione di compatibilità (3) e se i punti del suo supporto sono separati di almeno 4ε tra loro e distanti di almeno 2ε da $\partial\Omega$. Per tale μ definiamo $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$ con $B_i := B_\varepsilon(x_i)$ e l'insieme delle funzioni compatibili con μ

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu) := \{u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon(\mu); S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N\}.$$

Indichiamo con $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mu) \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)$ l'unico minimo del problema (4), ovvero la funzione tale che

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2.$$

Definiamo il funzionale energia $E_\varepsilon^g : X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{se } \mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7)$$

Abbiamo quindi la famiglia di problemi di minimo

$$\min\{E_\varepsilon^g(\mu) : \mu \in X(\bar{\Omega})\} \quad (8)$$

dipendente dal parametro di scala $\varepsilon > 0$. Siamo interessati a trovare un problema limite

$$\min\{E^g(\mu) : \mu \in X(\bar{\Omega})\}$$

in modo che se μ_ε è punto di minimo di E_ε^g e $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$ (in una opportuna topologia \mathcal{T} su $X(\bar{\Omega})$) si abbia

1. (convergenza dei punti di minimo) μ è punto di minimo di E^g ;
2. (convergenza dei minimi) $E_\varepsilon^g(\mu_\varepsilon) \rightarrow E^g(\mu)$.

Questo ci è garantito se E_ε^g Γ -converge ad E^g rispetto alla topologia τ . Vediamo quale può essere il possibile Γ -limite. Lo sviluppo asintotico dell'energia (4), che nelle nuove notazioni (per $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g$) è dato da

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \pi \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right) |\log \varepsilon| + W(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + o(\varepsilon) \quad (9)$$

mostra che qualunque sia la topologia τ che scegliamo su $X(\bar{\Omega})$, il Γ -limite di E_ε^g sarà il funzionale $E^g \equiv +\infty$, che non ci dà nessuna informazione interessante sul comportamento asintotico dei minimi di E_ε^g . Tuttavia la (9) ci dice anche

che l'ordine di infinito di E_ε^g è $|\log \varepsilon|$, per cui è naturale introdurre i funzionali riscaldati $F_\varepsilon^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da

$$F_\varepsilon^g(\mu) = \frac{E_\varepsilon^g(\mu)}{|\log \varepsilon|} \quad \text{per } \mu \in X(\bar{\Omega}) . \quad (10)$$

Dal momento che E_ε^g ed F_ε^g hanno gli stessi punti di minimo, lo studio della Γ -convergenza della famiglia F_ε^g equivale a quello della famiglia E_ε^g .

Il risultato principale del Capitolo 4 (Teorema 4.19) è che nella topologia $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$ sull'insieme $X(\bar{\Omega})$ si ha

$$F_\varepsilon^g \xrightarrow{\Gamma} F^g \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

dove $F^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è il funzionale definito da

$$F^g(\mu) = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^N |d_i| & \text{se } \sum_{i=1}^N d_i = d, \\ +\infty & \text{altrimenti .} \end{cases} \quad (11)$$

Evidentemente F^g non è sensibile alla posizione dei punti $(x_1, \dots, x_N) \in \bar{\Omega}^N$ del supporto della misura μ , ma solamente dai pesi di tali punti. Inoltre si vede facilmente che

$$\arg \min F^g = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : d_i > 0, \sum_{i=1}^N d_i = d \right\} .$$

Per ottenere informazioni più precise sulla posizione ottimale dei punti e sui valori dei gradi è necessario studiare la Γ -convergenza all'ordine successivo: l'idea è di mostrare che i funzionali $E_\varepsilon^g - \pi d |\log \varepsilon|$ Γ -convergono all'energia rinormalizzata W . Notiamo infatti che l'energia W dipende dalla posizione delle singolarità, e che quindi i suoi minimi ci forniscono informazioni non banali sulla posizione ottimale delle singolarità quando ε tende a zero. La strategia sopra descritta sarà brevemente discussa nel Capitolo 5. La dimostrazione di tale risultato di Γ -convergenza esula dallo scopo di questa Tesi, e si basa in gran parte sulle stime di Γ -convergenza all'ordine zero trattate nel Capitolo 4.

La Tesi è organizzata come segue. Il Capitolo 1 è diviso in due parti. Nei primi cinque paragrafi si introduce la teoria classica del grado topologico per funzioni continue $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ e si discutono l'esistenza, la regolarità e le proprietà del lifting. Nella seconda parte viene definita una opportuna nozione di grado per funzioni di $H^{1/2}(\partial\Omega; S^1)$ (che ricordiamo non essere continue: siamo in un caso limite delle immersioni di Sobolev), seguendo [B1], [BGP], [BN1] e [BN2]. Vengono enunciate, e in alcuni casi dimostrate, le principali proprietà del grado $H^{1/2}$, che sono leggermente differenti da quelle del grado classico. In seguito viene discussa la regolarità del lifting di funzioni H^1 e $H^{1/2}$ (seguendo [BBM]).

Nel Capitolo 2 viene richiamato il metodo diretto del calcolo delle variazioni e si introduce la Γ -convergenza prendendo come riferimento le monografie [Br] e [D].

Il Capitolo 3 è dedicato allo studio del problema di minimo (1) ed è basato sul Capitolo 1 di [BBH1]. Viene prima studiato il caso $d = 0$ in cui $H_g^1(\Omega; S^1)$ è non vuoto e il problema (1) è ben definito. I risultati di questo caso possono essere riassunti nel seguente Teorema:

Teorema 0.1. *Se $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ è regolare, il problema (1) ammette un'unica soluzione regolare $u_0: \bar{\Omega} \rightarrow S^1$. Inoltre u_0 risolve il sistema lineare*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = u_0 |\nabla u_0|^2 & \text{in } \Omega \\ |u_0| = 1 & \text{in } \Omega \\ u_0 = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ed è tale che

$$u_0 = e^{i\varphi_0} \quad \text{in } \Omega$$

con $\varphi_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione armonica in Ω .

Si passa poi allo studio del caso $d \neq 0$ e quindi del CRA. In questo caso infatti $H_g^1(\Omega; S^1) = \emptyset$ e il problema (1) è mal posto. Gli sostituiamo quindi la famiglia di problemi (4) dipendente dal parametro $\varepsilon > 0$. Notiamo che la funzione $u \mapsto \deg(u; \partial B_i)$ non è continua per la topologia debole di $H^{1/2}(\partial B_i)$ dunque il metodo diretto (inteso come in Teorema 2.1) fallisce nel provare l'esistenza del minimo in (4). Grazie ai risultati di lifting del Capitolo 1 si riesce tuttavia a provare il seguente teorema (si veda il Teorema 3.3):

Teorema 0.2. *Il problema (4) ammette un'unica soluzione u_ε . Tale soluzione è regolare e inoltre*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \quad (12)$$

dove ϕ_ε è soluzione classica del problema lineare

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = g \times g_\tau & \text{su } \partial\Omega, \\ \phi = C_i = \text{cost.} & \text{su } \partial B_i, \text{ per } i = 1, \dots, N, \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

con ν normale esterna ad Ω e alle B_i . Si noti che in (13) le C_i non sono assegnate ma sono parte del problema.

Nel Teorema 3.6 dimostriamo poi che

$$\|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (14)$$

dove ϕ_0 è soluzione regolare in $\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ del problema limite

$$\begin{cases} \Delta \phi_0 = 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15)$$

La (12) e la (14) ci permettono di provare che per u_ε vale lo sviluppo asintotico (5). Se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)$ si vede infatti che (Teorema 3.10) l'energia rinormalizzata ha l'espressione

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = -\pi \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N d_i d_j \log |x_i - x_j| - \pi \sum_{i=1}^N d_i R(x_i) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)$$

dove $R(x) = \phi_0(x) - \sum_{i=1}^N d_i \log|x - x_i|$. Si noti che R è regolare in $\bar{\Omega}$ per cui $R(x_i)$ è una quantità finita.

Nel Capitolo 4 cominciamo infine l'analisi per Γ -convergenza. Per prima cosa formuliamo l'analogo del problema (4) senza dato al bordo, e studiamo l'analisi asintotica per Γ -convergenza di questo caso. A tale scopo si introduce l'insieme delle singolarità topologiche

$$X(\Omega) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \Omega \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Le singolarità ammissibili per $\varepsilon > 0$ fissato sono il sottoinsieme di $X(\Omega)$ che denotiamo con \mathcal{A}_ε : una μ è ammissibile se soddisfa la condizione di compatibilità (3) e se i punti del suo supporto sono separati di almeno 4ε tra di loro e distanti di almeno 2ε da $\partial\Omega$. Definiamo l'insieme delle funzioni compatibili con $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ come

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mu) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varepsilon(\mu); S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Consideriamo il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2$$

e indichiamo con u_ε una sua soluzione (che esiste per il Teorema 3.22). Possiamo definire il funzionale $F_\varepsilon : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$F_\varepsilon(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2|\log \varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{se } \mu \in \mathcal{A}_\varepsilon, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel Paragrafo 4.2 individueremo una topologia su $X(\Omega)$ che garantisce la compattezza delle successioni $\{\mu_\varepsilon\}$ tali che $\{F_\varepsilon(\mu_\varepsilon)\}$ è limitata e al contempo le stime energetiche che definiscono la Γ -convergenza. Tale scelta risulta essere non banale, dal momento che l'usuale convergenza *-debole non è adatta in questo caso. Il motivo per cui non si può usare la convergenza *-debole è che si può costruire una famiglia di misure μ_ε composte da molti dipoli (il cui numero diverge per $\varepsilon \rightarrow 0$), e il cui contributo energetico è piccolo a piacere. Le stime energetiche della Γ -convergenza si basano invece su una costruzione nota come *Ball construction*, che sarà descritta nel Paragrafo 4.4. Come conseguenza di queste stime si ottiene il risultato centrale della Tesi (si veda il Teorema 4.6):

Teorema 0.3. *Rispetto alla topologia della norma flat su $X(\Omega)$ i funzionali F_ε sono equicoercivi. Inoltre*

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0 \tag{16}$$

con $F : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $F(\mu) = \pi \sum_{i=1}^N |d_i|$.

Utilizzando questo risultato e le tecniche usate nella sua dimostrazione, nel Paragrafo 4.7 si prova anche il teorema di Γ -convergenza per i funzionali con dato al bordo definiti in (10):

Teorema 0.4. *Nella topologia $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$ sullo spazio $X(\bar{\Omega})$ i funzionali F_ε^g sono equicoercivi. Inoltre*

$$F_\varepsilon^g \xrightarrow{\Gamma} F^g \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

con F^g funzionale definito in (11).

Il Capitolo 4 si conclude con la prova che i funzionali F_ε^g ammettono minimo su $X(\bar{\Omega})$ per ogni $\varepsilon > 0$ fissato (si veda il Teorema 4.21).

Infine nel Capitolo 5 enunciamo, senza dimostrazione, il risultato di Γ -convergenza all'ordine uno per i funzionali $E_\varepsilon^g - \pi d_i |\log \varepsilon|$. Come abbiamo già detto, la dimostrazione di questo risultato esula dallo scopo di questa Tesi, ma si basa per la maggior parte sulle stime di Γ -convergenza all'ordine zero ottenute nel Capitolo 4. Nel Corollario 5.2 traiamo infine le conclusioni sul comportamento asintotico per $\varepsilon \rightarrow 0$ dei minimi di E_ε^g . Vogliamo riassumerle brevemente. Se poniamo $N = d$ e i gradi $d_i = 1$ possiamo vedere l'energia rinormalizzata W come sola funzione delle posizioni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Si dimostra che (si veda [BBH1, Theorem I.10]) in questo caso

$$\min W := \min \{W(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \bar{\Omega}\}$$

è raggiunto da punti (x_1, \dots, x_d) con $x_i \in \Omega$ e tutti distinti tra loro. Se denotiamo con m_ε il minimo di E_ε^g su $X(\bar{\Omega})$ abbiamo che

$$m_\varepsilon = \pi d |\log \varepsilon| + \min W + o(\varepsilon), \quad (17)$$

mentre i punti di accumulazione di $\arg \min E_\varepsilon^g$ sono misure di Dirac della forma $\mu = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ configurazione tale che $W(\mathbf{x}) = \min W$. Si noti che lo sviluppo (17) poteva essere intuito dalla (9) con considerazioni euristiche. Se infatti si vuole minimizzare l'energia E_ε^g , bisogna rendere piccolo il termine di destra in (9). Tra le possibili scelte di N , \mathbf{x} e \mathbf{d} siamo portati a

1. scegliere $N = d$ e $d_i = 1$ per $i = 1, \dots, N$. Questo perché

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^N d_i^2 : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^N d_i = d \right\}$$

è raggiunto se $N = d$ ed ogni $d_i = 1$;

2. scegliere una configurazione (x_1, \dots, x_d) che minimizza W .

Queste scelte portano a ipotizzare il comportamento asintotico dei punti di minimo predetto dal Corollario 5.2 e se sostituite in (9) restituiscono il membro destro della (17).

Capitolo 1

Grado topologico e lifting

In questo capitolo ci occuperemo delle questioni di grado topologico e lifting. Nei primi cinque paragrafi ci occuperemo di questi argomenti nell'ambito delle funzioni continue. Successivamente procederemo all'analisi del caso di funzioni di Sobolev, portando avanti un parallelo con il caso continuo.

1.1 Grado topologico per funzioni continue

In questo Paragrafo $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ è una curva diffeomorfa ad S^1 , orientata in modo naturale e parametrizzata con $x: [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$, $x = (x_1, x_2)$, in modo che $x'(t)$ sia il versore tangente a Γ nel punto $x(t)$. All'occorrenza \mathbb{R}^2 verrà identificato con il piano complesso \mathbb{C} . Sia data una funzione continua

$$u: \Gamma \rightarrow S^1.$$

le cui componenti indichiamo con $u = (u_1, u_2)$. Intuitivamente il grado topologico di Brouwer di u è il numero di avvolgimenti della curva $u(\Gamma)$ attorno all'origine. Vediamo come possiamo definirlo rigorosamente.

Se u è anche una funzione $C^1(\Gamma; S^1)$ (nel senso detto in Appendice A.1.2), dall'analisi complessa sappiamo che il numero di avvolgimenti intorno all'origine della curva $u(\Gamma)$ è dato dall'integrale in campo complesso

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u'(z)}{u(z)} dz. \quad (1.1)$$

Ricordiamo che l'integrale complesso per $v \in C^1(\Gamma; S^1)$ è definito come

$$\int_{\Gamma} v(z) dz := \int_0^{2\pi} v(x(t)) x'(t) dt$$

dove il prodotto è quello tra numeri complessi. Abbandonando le notazioni complesse la quantità (1.1) può essere espressa come

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u \times u_{\tau}$$

dove $\tau(t) = (x'_1(t), x'_2(t))$ è il versore tangente a Γ nel punto $x(t)$, u_{τ} è la derivata tangenziale di u lungo Γ

$$u_{\tau} := (\nabla u_1 \cdot \tau, \nabla u_2 \cdot \tau)$$

e \times denota il prodotto vettore in \mathbb{R}^2 .

Definizione 1.1 (Grado topologico per funzioni C^1). Se $u \in C^1(\Gamma; S^1)$ la quantità

$$\deg(u; \Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u \times u_{\tau}$$

si dice *grado topologico di Brouwer* di u rispetto alla curva Γ .

Si dimostra che il grado topologico è sempre un numero intero.

Vogliamo ora estendere la definizione di grado a funzioni che sono solo continue. Utilizziamo il seguente Lemma (si veda [B1]):

Lemma 1.2. *Siano $u, v \in C^1(\Gamma; S^1)$. Se*

$$\|u - v\|_{\infty} < 1$$

allora

$$\deg(u; \Gamma) = \deg(v; \Gamma) .$$

Grazie a questo Lemma possiamo estendere la definizione di grado topologico a funzioni che sono solamente continue. Vale il seguente risultato di densità:

Proposizione 1.3. *Sia $u \in C(\Gamma; S^1)$. Allora esiste una successione di funzioni $\{u_n\} \subset C^{\infty}(\Gamma; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente in Γ .*

Dimostrazione. Utilizzando i mollificatori standard possiamo costruire una famiglia di funzioni $v_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tali che $v_{\varepsilon} \rightarrow u$ uniformemente su Γ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Consideriamo la successione rinormalizzata

$$u_{\varepsilon} := \frac{v_{\varepsilon}}{|v_{\varepsilon}|} .$$

Notiamo che u_{ε} è ben definita su Γ per ε abbastanza piccoli, infatti $|v_{\varepsilon}| \rightarrow |u| = 1$ uniformemente su Γ e quindi il denominatore non si annulla su Γ . Dunque $u_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Gamma; S^1)$ è la successione della tesi. \square

Definizione 1.4 (Grado topologico per funzioni continue). Sia $u \in C(\Gamma; S^1)$. Consideriamo una successione di funzioni $\{u_n\} \subset C^1(\Gamma; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente su Γ . Il limite

$$\deg(u; \Gamma) := \lim_{n \rightarrow \infty} \deg(u_n; \Gamma) \tag{1.2}$$

si dice *grado topologico di Brouwer* di u rispetto alla curva Γ .

Notiamo che la definizione è ben posta perchè:

1. una successione approssimante regolare esiste per la Proposizione 1.3.
2. $\{u_n\}$ è convergente uniformemente su Γ . Dunque esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|u_j - u_k\|_{\infty} < 1 \quad \text{per ogni } j, k \geq N .$$

Dal Lemma 1.2 segue quindi che

$$\deg(u_n; \Gamma) = \deg(u_N; \Gamma) \quad \text{per ogni } n \geq N ,$$

ovvero la successione di numeri interi $\deg(u_n; \Gamma)$ è definitivamente costante, e il limite in (1.2) esiste finito (ed è un numero intero).

3. il grado di u non dipende dalla successione scelta. Sia infatti $\{w_n\} \subset C^1(\Gamma; S^1)$ un'altra successione tale che $w_n \rightarrow u$ ad uniformemente. Allora $u_n - w_n \rightarrow 0$ uniformemente ed esiste N tale che $\|u_n - w_n\|_\infty < 1$ per ogni $n \geq N$. Quindi dal Lemma 1.2 si ha $\deg(u) = \deg(u_n) = \deg(w_n)$ definitivamente.

Per definizione, il Lemma 1.2 si estende anche alle funzioni continue:

Lemma 1.5. *Siano $u, v \in C(\Gamma; S^1)$. Se*

$$\|u - v\|_\infty < 1$$

allora

$$\deg(u; \Gamma) = \deg(v; \Gamma) .$$

Sottolineiamo che il Lemma 1.5 afferma la stabilità della nozione di grado topologico rispetto alla convergenza uniforme: se $u_n \rightarrow u$ uniformemente allora $\deg(u_n; \Gamma) \rightarrow \deg(u; \Gamma)$ e in particolare la successione $\deg(u_n; \Gamma)$ è definitivamente costante.

Citiamo senza dimostrazione alcune proprietà del grado topologico che ci saranno utili nel seguito. Per i dettagli facciamo riferimento a [B1].

Teorema 1.6. *Siano $u, v \in C(\Gamma; S^1)$. Valgono le seguenti proprietà:*

1. *il grado è un numero intero;*
2. *il grado è invariante per omotopia di funzioni, i.e. se esiste*

$$H \in C(\Gamma \times [0, 1]; S^1)$$

tale che

$$H(\cdot, 0) = u \quad e \quad H(\cdot, 1) = v$$

allora

$$\deg(u; \Gamma) = \deg(v; \Gamma) ;$$

3. *(Hopf) se u e v sono tali che*

$$\deg(u; \Gamma) = \deg(v; \Gamma)$$

allora esiste omotopia $H \in C(\Gamma \times [0, 1]; S^1)$ tale che

$$H(\cdot, 0) = u \quad e \quad H(\cdot, 1) = v$$

4. *il grado è invariante per omotopia di cammini, i.e. se $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, $u: U \rightarrow S^1$ è continua e $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ sono due cammini diffeomorfi ad S^1 e omotopi, allora*

$$\deg(u; \Gamma_1) = \deg(u; \Gamma_2) .$$

Diamo ora una caratterizzazione del grado in termini di integrale di una opportuna 1-forma.

Proposizione 1.7. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e regolare ed $u \in C^1(\bar{U}; S^1)$. Per ogni curva $\Gamma \subset \bar{U}$ diffeomorfa ad S^1 il grado può essere calcolato come

$$\deg(u; \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega \quad (1.3)$$

dove ω è la 1-forma

$$\omega = \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2 \quad (1.4)$$

con (x_1, x_2) coordinate euclidee su U .

Dimostrazione. Vale l'identità

$$\begin{aligned} u \times u_\tau &= u_1 \nabla u_2 \cdot \tau - u_2 \nabla u_1 \cdot \tau \\ &= u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tau_2 \right) - u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tau_2 \right) \\ &= \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \tau_1 + \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \tau_2 \\ &= \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \tau_1 + \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \tau_2 \end{aligned}$$

e quindi l'integrale su Γ della funzione $u \times u_\tau$ è esattamente l'integrale su Γ della 1-forma ω . \square

Una conseguenza di questa osservazione è la seguente formula di rappresentazione del grado:

Teorema 1.8. Sia $u \in C(\Gamma; S^1)$. Allora

$$\deg(u; \Gamma) = \frac{1}{\pi} \int_A J(\tilde{u}) \quad (1.5)$$

dove A è il dominio tale che $\partial A = \Gamma$, $\tilde{u} \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$ è una qualsiasi estensione di u in A e $J(\tilde{u})$ è lo Jacobiano di \tilde{u} .

Si noti che non è richiesto che l'estensione \tilde{u} sia a valori in S^1 . Come vedremo nel Teorema 1.22 infatti, estensioni a valori in S^1 di u esistono se e soltanto se $\deg(u; \Gamma) = 0$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1. Supponiamo che $u \in C^2(\Gamma; S^1)$. Allora il differenziale della 1-forma ω definita in (1.3) è la 2-forma

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 = 2 J(u) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'antisimmetria del prodotto vettore e il fatto che lo Jacobiano si scrive come

$$J(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Per la precedente Proposizione 1.7 e il Teorema di Stokes

$$\deg(u; \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial A} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_A d\omega = \frac{1}{\pi} \int_A J(\tilde{u}).$$

Passo 2. Siano ora $u \in C(\Gamma; S^1)$ e $\tilde{u} \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$ una sua estensione C^1 . Per la Proposizione 1.3 esiste una successione di funzioni $\{u_n\} \subset C^\infty(\Gamma; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente in Γ . Siano v_n le estensioni armoniche di tali funzioni in A . Se v è l'estensione armonica di u in A si ha $v_n \rightarrow v$ in norma C^1 .

La funzione $\tilde{u} - v$ è nulla su Γ , quindi può essere approssimata in norma C^1 con funzioni $w_n \in C_c^\infty(A; \mathbb{R}^2)$. Consideriamo $\tilde{u}_n = w_n + v_n$. Allora

$$\tilde{u}_n = u_n \rightarrow u \quad \text{uniformemente su } \Gamma$$

e

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} \quad \text{in } C^1(A; \mathbb{R}^2).$$

In particolare

$$J(\tilde{u}_n) \rightarrow J(\tilde{u}) \quad \text{uniformemente in } A. \quad (1.6)$$

Essendo \tilde{u}_n regolari dal passo precedente si ha

$$\deg(u_n; \Gamma) = \frac{1}{\pi} \int_A J(\tilde{u}_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Per la (1.6) e poiché $\deg(u_n; \Gamma) \rightarrow \deg(u; \Gamma)$, passando al limite in (1.7) otteniamo la (1.5). \square

Prima di concludere questo paragrafo con un esempio, è conveniente osservare che valgono alcune proprietà algebriche del grado.

Proposizione 1.9. *Siano $u, v \in C(\Gamma; S^1)$. Valgono le seguenti relazioni*

$$\deg(u^{-1}; \Gamma) = -\deg(u; \Gamma) \quad (1.8)$$

$$\deg(uv; \Gamma) = \deg(u; \Gamma) + \deg(v; \Gamma) \quad (1.9)$$

$$\deg(u^k; \Gamma) = k \deg(u; \Gamma) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

intendendo con uv il prodotto in \mathbb{C} .

Dimostrazione. Poiché u assume valori in S^1 , si ha

$$u \bar{u} = |u|^2 = 1$$

dove con \bar{u} intendiamo il complesso coniugato. Dunque

$$u^{-1} = u^{-1} u \bar{u} = \bar{u}$$

e in particolare

$$\deg(u^{-1}; \Gamma) = \deg(\bar{u}; \Gamma). \quad (1.11)$$

In generale se $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ vale la relazione

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1, -a_2) \times (b_1, -b_2) = -a_1 b_2 + a_2 b_1 = -a \times b$$

da cui

$$\deg(\bar{u}; \Gamma) = \int_{\Gamma} \bar{u} \times \bar{u}_\tau = - \int_{\Gamma} u \times u_\tau = -\deg(u; \Gamma). \quad (1.12)$$

Dalle (1.11) e (1.12) segue la (1.8).

Si verifica poi che vale l'identità

$$a b \times c = a \times \bar{b} c \quad \text{per ogni } a, b, c \in \mathbb{R}^2 \quad (1.13)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} u v \times (u v)_\tau &= u v \times u_\tau v + u v \times u v_\tau \\ &\stackrel{(1.13)}{=} u \times u_\tau v \bar{v} + v \times \bar{u} u v_\tau = u \times u_\tau + v \times v_\tau \end{aligned}$$

essendo u e v a valori in S^1 . Integrando su Γ otteniamo la (1.9).

Proviamo infine la (1.10). Se $k = 0$ segue dal fatto che $\deg(1; \Gamma) = 0$. Se $k > 1$ basta applicare $k - 1$ volte la (1.9). Infine per $k < 0$ ci si riconduce al caso $k > 0$ usando la (1.8). \square

Esempio 1.10. Consideriamo la funzione a valori in S^1

$$u(x) = \frac{x}{|x|}$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto diffeomorfo a $B_1(0)$ e tale che $0 \notin \partial A$. Allora

$$\deg(u; \partial A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases} \quad (1.14)$$

In altre parole il grado è 1 se ∂A gira intorno all'origine e zero altrimenti.

Osserviamo infatti che

$$\nabla u(x) = \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{per } x \neq 0$$

dunque il suo jacobiano è

$$J(u) = \det \nabla u = 0 \quad \text{per } x \neq 0. \quad (1.15)$$

Se $0 \notin A$, si ha $u \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$, quindi per il Teorema 1.8

$$\deg(u; \partial A) \stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{\pi} \int_A J(u) \stackrel{(1.15)}{=} 0.$$

Supponiamo adesso che $0 \in A$. Notiamo che questa volta non possiamo usare il Teorema 1.8 perché u è singolare in $0 \in A$. Osserviamo tuttavia che in questo caso ∂A è omotopo ad S^1 (con omotopia nel dominio in cui u è regolare) e quindi per invarianza omotopica del grado rispetto ai cammini si ha

$$\deg(u; \partial A) = \deg(u; S^1).$$

Questa volta per calcolare il grado usiamo la Proposizione 1.7. La 1-forma ω associata ad u è

$$\omega = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

Parametizziamo S^1 con $x: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ definita da $x(t) = (\cos(t), \sin(t))$ in modo che $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1' = -x_2$, $x_2' = x_1$ e

$$\deg(u; S^1) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt = 1.$$

Si noti che $\omega|_{S^1}$ è il generatore di $H_{dR}^1(S^1)$ primo gruppo di coomologia di De Rham di S^1 . ■

Vediamo un esempio leggermente più generale:

Esempio 1.11. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}$ e consideriamo la funzione a valori in S^1

$$u_{x_0}(x) = \frac{(x - x_0)^k}{|x - x_0|^k}.$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto diffeomorfo a $B_1(0)$ e tale che $x_0 \notin \partial A$. Allora

$$\deg(u_{x_0}; \partial A) = \begin{cases} k & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases} \quad (1.16)$$

Infatti la (1.16) vale per $k = 1$, facendo gli stessi conti dell'esempio precedente con il cambio di variabile $y = x - x_0$. Una volta che (1.16) vale per $k = 1$, segue che vale per ogni $k \in \mathbb{Z}$ applicando le (1.10) e (1.8). ■

1.2 Lifting in $C(\Omega; S^1)$ con Ω semplicemente connesso

In questo paragrafo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato, semplicemente connesso e con frontiera regolare. Sia data una funzione continua

$$u: \Omega \rightarrow S^1.$$

Per ogni fissato $x \in \Omega$ abbiamo che $u(x) \in S^1$, dunque esiste un qualche $\varphi \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = e^{i\varphi}$. Resta quindi definita la funzione $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = e^{i\varphi(x)} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Definizione 1.12. Una tale φ si dice *lifting* di u in Ω .

L'obiettivo è trovare il lifting più regolare possibile, una volta assegnata una certa regolarità per u . Vale il seguente risultato:

Teorema 1.13. Sia $u \in C^k(\Omega; S^1)$ con $k \geq 0$. Allora esiste $\varphi \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$u(x) = e^{i\varphi(x)} \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (1.17)$$

Inoltre due lifting continui di u differiscono per un multiplo intero di 2π .

Quello appena enunciato è un risultato classico di topologia¹. Vogliamo però darne una dimostrazione di tipo analitico. Ci sarà utile il seguente risultato di densità:

Proposizione 1.14. Se $u \in C(\Omega; S^1)$ esiste una successione di funzioni $\{u_n\}$ in $C^\infty(\Omega; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente sui compatti di Ω .

¹Si veda per esempio il Lemma 3 di [BZ].

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la stessa della Proposizione 1.3. Utilizzando i mollificatori standard possiamo costruire una famiglia di funzioni $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ tali che $v_\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente sui compatti di Ω , per $\varepsilon \rightarrow 0$. Consideriamo la successione rinormalizzata

$$u_\varepsilon := \frac{v_\varepsilon}{|v_\varepsilon|}$$

che è ben definita per ε abbastanza piccoli, perché $|v_\varepsilon| \rightarrow |u| = 1$ uniformemente sui compatti. La successione u_ε soddisfa la tesi. \square

Supponiamo adesso che valga la (1.17) e deriviamo delle equazioni soddisfatte dalla u e dalla φ in ipotesi di regolarità.

Lemma 1.15. *Siano $u \in C^1(\Omega; S^1)$ e $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ tali che valga la (1.17). Allora*

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in \Omega \quad (1.18)$$

che scriviamo in forma compatta come

$$\nabla \varphi = u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1.$$

Viceversa, supponiamo che u e φ soddisfino le (1.18). Allora

$$u = e^{i(\varphi+c)} \quad \text{per ogni } x \in \Omega$$

per una opportuna costante $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $u = e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ derivando segue che

$$\nabla u_1 = -u_2 \nabla \varphi \quad (1.19)$$

$$\nabla u_2 = u_1 \nabla \varphi \quad (1.20)$$

Se moltiplichiamo per $-u_2$ la (1.19), per u_1 la (1.20), le sommiamo e teniamo conto del fatto che $u_1^2 + u_2^2 = 1$ otteniamo le (1.18).

Viceversa, supponiamo che u e φ soddisfino le (1.18) e consideriamo la funzione $w = u e^{-i\varphi}$ (si intende il prodotto in \mathbb{C}). Se indichiamo il complesso coniugato con $\bar{u} = u_1 - iu_2 = (u_1, -u_2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla w &= \nabla u e^{-i\varphi} - i \nabla \varphi u e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} (\nabla u - iu \nabla \varphi) \\ &= u e^{-i\varphi} (\bar{u} \nabla u - i\varphi) = 0 \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} \bar{u} \nabla u &= (u_1 - iu_2)(\nabla u_1 + i\nabla u_2) \\ &= u_1 \nabla u_1 + u_2 \nabla u_2 + i(u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1) = i \nabla \varphi \end{aligned}$$

per le (1.18) e perché dalle (1.19) e (1.20) si ha $u_1 \nabla u_1 = -u_1 u_2 \nabla \varphi = -u_2 \nabla u_2$. Poiché $\nabla w = 0$ in Ω connesso esiste una costante $a \in \mathbb{R}^2$ tale che $w = a$ in Ω . Ma $|w| = 1$ e quindi $|a| = 1$ ed esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a = e^{ic}$, da cui $u = e^{i(\varphi+c)}$. \square

Dunque trovare un lifting di u equivale a risolvere le (1.18). Notiamo che se $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ il suo differenziale in coordinate euclidee si scrive

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2.$$

Introduciamo la 1-forma a coefficienti in $C^1(\Omega; \mathbb{R})$

$$\omega = \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2. \quad (1.21)$$

Risolvere le (1.18) equivale a risolvere

$$d\varphi = \omega,$$

ovvero a trovare un potenziale per la 1-forma ω .

Nel caso in cui u sia regolare il problema dell'integrazione di una 1-forma a coefficienti regolari in un dominio di \mathbb{R}^2 ha una soluzione ben nota: se Ω è semplicemente connesso, il classico Lemma di Poincaré ci assicura che sono fatti equivalenti:

1. ω ha un potenziale;
2. ω è chiusa, cioè $d\omega = 0$.

Come calcolato nella dimostrazione del Teorema 1.8, il differenziale di ω è dato dalla 2-forma

$$d\omega = 2J(u) dx_1 \wedge dx_2.$$

Ma se u è una funzione a valori in S^1 vale il seguente risultato:

Proposizione 1.16. *Sia $u \in C^1(\Omega; S^1)$. Allora*

$$J(u) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Visto che u assume valori in S^1 vale la relazione

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (1.22)$$

Dal momento che u è C^1 possiamo derivare la (1.22) ottenendo che

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Quest'ultima relazione ci dice che u è ortogonale al vettore $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ per $i = 1, 2$. Dal momento che siamo nel piano, segue che $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sono paralleli, cioè

$$J(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

□

Possiamo quindi dimostrare il Teorema 1.13:

Dimostrazione del Teorema 1.13. Passo 1. Assumiamo prima che $u \in C^2(\Omega; S^1)$. Sotto questa ipotesi aggiuntiva di regolarità vale il conto fatto nella dimostrazione del Teorema 1.8, ovvero il differenziale di ω vale

$$d\omega = 2J(u) dx_1 \wedge dx_2.$$

Dalla Proposizione 1.16 abbiamo $d\omega = 0$. Quindi ω è una forma chiusa in Ω semplicemente connesso e per il Lemma di Poincaré esiste una $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $d\varphi = \omega$, ovvero valgono le (1.18). Dal Lemma 1.15 segue allora che $\varphi + c$ è lifting di u per qualche $c \in \mathbb{R}$. Infine, dalla relazione $d\varphi = \omega$ segue che φ ha la stessa regolarità di u .

Passo 2. Sia $u \in C(\Omega; S^1)$. Per la Proposizione 1.14 esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente sui compatti di Ω . Dal passo precedente, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un lifting $\varphi_n \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ di u_n in Ω . Ora, abbiamo convergenza puntuale di u_n ad u , cioè $e^{i\varphi_n(x)} \rightarrow u(x)$ e da questo segue che φ_n converge ad una qualche funzione φ tale che $u = e^{i\varphi}$. Essendo u continua, possiamo invertire localmente la relazione $u = e^{i\varphi}$ e concludere che φ è continua.

Passo 3. Mostriamo infine che due lifting continui di u differiscono per un multiplo intero di 2π . Siano dunque φ e ψ due lifting continui di u . Fissato $x \in \Omega$ si ha $e^{i\varphi(x)} = e^{i\psi(x)}$ e quindi esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\varphi(x) = \psi(x) + 2k\pi$. In tal modo possiamo definire la funzione $k: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che

$$\varphi(x) = \psi(x) + 2k(x)\pi \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Dunque k è una funzione continua a valori in \mathbb{Z} e quindi è costante sulle componenti connesse di Ω . Essendo Ω connesso, abbiamo concluso. \square

1.3 Lifting in $C(\Gamma; S^1)$

Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva diffeomorfa ad S^1 , orientata in modo naturale e parametrizzata con $x: [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$, $x = (x_1, x_2)$, in modo che $x'(t)$ sia il versore tangente a Γ nel punto $x(t)$. Sia data una funzione continua

$$u: \Gamma \rightarrow S^1.$$

Definizione 1.17. Una funzione $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = e^{i\varphi(x)} \quad \text{per ogni } x \in \Gamma.$$

si dice *lifting* di u su Γ .

Come nel precedente paragrafo, l'obiettivo è trovare il lifting più regolare possibile, una volta assegnata una certa regolarità per u .

Localmente il problema ha una soluzione immediata: fissiamo $x_0 \in \Gamma$ e scegliamo un ramo ² del logaritmo complesso che sia analitico (olomorfo) in un intorno $U \subset S^1$ di $u(x_0)$. Dunque $u^{-1}(U)$ è aperto per continuità di u ed esiste $R > 0$ tale che $(B_R(x_0) \cap \Gamma) \subset u^{-1}(U)$. Se $I_{x_0} := B_R(x_0) \cap \Gamma$ è ben definito

$$\varphi(x) = -i \log u(x), \quad x \in I_{x_0}$$

che è un lifting di u su I_{x_0} con la stessa regolarità di u . Abbiamo quindi la seguente proposizione:

²Nel senso di [Ah].

Proposizione 1.18. Se $u \in C^k(\Gamma; S^1)$, per ogni $x_0 \in \Gamma$ esiste un suo intorno aperto $I_{x_0} \subseteq \Gamma$ e una $\varphi \in C^k(I_{x_0}; \mathbb{R})$ tale che $u(x) = e^{i\varphi(x)}$ per ogni $x \in I_{x_0}$.

Vediamo l'esempio modello.

Esempio 1.19. Sia $\Gamma = S^1$ e consideriamo $u: S^1 \rightarrow S^1$ definita da

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Un lifting per u è dato dalla funzione argomento principale di un numero complesso definita da

$$\text{Arg}(z) := \left\{ y \in (0, 2\pi) \in \mathbb{R} : e^{iy} = \frac{z}{|z|} \right\} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus R_0$$

con R_0 semiasse positivo:

$$R_0 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 0, \text{Im } z = 0\}.$$

Ricordiamo dall'analisi complessa (si veda sempre [Ah]) che la funzione Arg è analitica (olomorfa) in $\mathbb{C} \setminus R_0$ ed ha un salto costante pari a 2π sulla semiretta R_0 .

Quindi il lifting $\theta = \text{Arg}$ ha localmente la stessa regolarità di u , ma osserviamo che non è in $C(S^1; \mathbb{R})$ perché ha un salto di 2π nel punto $(1, 0)$.

Notiamo che altri lifting di u sono dati da $\arg + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ e arg un'altra determinazione della funzione argomento. Tutti questi lifting hanno sempre un salto di 2π in un qualche punto $p \in S^1$.

Quindi, in accordo con la Proposizione 1.18, riusciamo sempre a selezionare un lifting locale di u che abbia la sua stessa regolarità. ■

Generalizziamo leggermente il precedente esempio:

Esempio 1.20. Consideriamo di nuovo la funzione

$$u_{x_0}(x) = \frac{(x - x_0)^k}{|x - x_0|^k}$$

definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$ fissati. Un lifting di u_{x_0} è dato dalla funzione

$$\theta_{x_0}(x) := k \text{Arg}(x - x_0)$$

definita su $\mathbb{C} \setminus R_{x_0}$ con

$$R_{x_0} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq \text{Re } x_0, \text{Im } z = \text{Im } x_0\}.$$

In tal modo $\theta_{x_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus R_{x_0}; \mathbb{R})$ con un salto costante di $2k\pi$ sulla semiretta R_{x_0} . ■

Ci chiediamo ora se sia sempre possibile costruire un lifting $\varphi \in C^k(\Gamma; \mathbb{R})$ globale per la funzione $u \in C^k(\Gamma; S^1)$. In generale la risposta è negativa.

Il controesempio è dato dalla funzione $u: S^1 \rightarrow S^1$ definita da $u(x) = x^k$ per $k \neq 0$. Il fatto che il lifting $\varphi(x) = k \text{Arg}(x)$ abbia un salto di $2k\pi$ nel punto $(1, 0)$ è del tutto generale: proveremo infatti che u non ammette lifting continui definiti su tutta S^1 e che ogni lifting ha un salto totale pari a $2\pi k$. Ci sono due motivi per cui $u = x^k$ non ammette lifting continui su tutta S^1 :

1. u ha grado $k \neq 0$ rispetto ad S^1 ;
2. S^1 non è semplicemente connessa.

Osserviamo infatti che

1. nel caso in cui $k = 0$ si ha $u \equiv 1$ che ha per lifting la funzione identicamente nulla, che è ovviamente $C^\infty(S^1; S^1)$;
2. se $p \in S^1$ e consideriamo $S^1 \setminus \{p\}$, questo è semplicemente connesso, ed esiste un lifting $\varphi \in C^\infty(S^1 \setminus \{p\}; \mathbb{R})$ di $u = x^k$, come visto nell'Esempio 1.20.

In effetti, come conseguenza del Teorema 1.13, la semplice connessione della curva di definizione è una condizione sufficiente ad avere lifting:

Teorema 1.21. *Sia $u \in C^k(\Gamma; S^1)$, $p \in \Gamma$ un punto arbitrario e consideriamo $I := \Gamma \setminus \{p\}$. Allora esiste un lifting $\varphi \in C^k(I; \mathbb{R})$ di u su I .*

Dimostrazione. Indichiamo con ν il campo di vettori normali a Γ . Notiamo che $I = \Gamma \setminus \{p\}$ è ancora una curva regolare.

Ricordiamo che per una curva C^n con $n \geq 2$ vale il Teorema dell'intorno tubolare³: esistono un intorno aperto A di I in \mathbb{R}^2 e un $\varepsilon > 0$ tali che la funzione

$$F(x, t) = x + t\nu(x)$$

è un diffeomorfismo di classe C^{n-1} di $I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ in A . Quindi nel nostro caso F è un diffeomorfismo di classe C^∞ .

Estendiamo u ad una funzione sull'intorno tubolare $\tilde{u}: A \rightarrow S^1$ ponendo $\tilde{u}(x, t) := u(x)$. In questo modo $u \in C^k(A; S^1)$. Notiamo che A è semplicemente connesso, essendo I semplicemente connesso ed essendo F un diffeomorfismo di $I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ in A . Quindi dal Teorema 1.13 la \tilde{u} ammette un lifting $\tilde{\varphi} \in C^k(A; \mathbb{R})$. In questo modo $\varphi = \tilde{\varphi}|_I$ è in $C^k(I; \mathbb{R})$ e soddisfa la tesi. \square

Per quanto riguarda il grado topologico invece, avere grado nullo è una condizione necessaria e sufficiente per avere lifting:

Teorema 1.22. *Sia $u \in C^k(\Gamma; S^1)$. Sono fatti equivalenti:*

1. esiste $\varphi \in C^k(\Gamma; \mathbb{R})$ lifting di u su Γ ;
2. $\deg(u; \Gamma) = 0$.

Inoltre lifting di u continui differiscono per un multiplo intero di 2π .

Per provare il teorema, dobbiamo mettere in relazione la nozione di grado topologico con quella di salto della funzione lifting. Per fissare le notazioni, sia $p \in \Gamma$ e $\varphi \in C(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$. Ricordando che $x: [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ è la parametrizzazione di Γ . Trasliamo la parametrizzazione x definendo la nuova parametrizzazione $\gamma_p: [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ in modo tale che $\gamma_p(0) = \gamma_p(2\pi) = p$.

Definizione 1.23. Il salto di φ in p è definito come la quantità

$$[\varphi]_p := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\varphi(\gamma_p(2\pi - \varepsilon)) - \varphi(\gamma_p(\varepsilon))\}.$$

³Un riferimento per il Teorema dell'intorno tubolare è per esempio [Fo].

Teorema 1.24. Siano $u \in C(\Gamma; S^1)$ e $p \in \Gamma$ un punto fissato. Consideriamo un lifting $\varphi \in C(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$ di u su $\Gamma \setminus \{p\}$. Allora

$$[\varphi]_p = 2\pi \deg(u; \Gamma) . \quad (1.23)$$

Dimostrazione. Passo 1. Supponiamo che $u \in C^1(\Gamma; S^1)$. Per il Teorema 1.21 i lifting di u hanno la sua stessa regolarità, ovvero $\varphi \in C^1(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$. Essendo u e φ regolari possiamo derivare la relazione

$$u = e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} \nabla u_1 = -\sin \varphi \nabla \varphi = -u_2 \nabla \varphi \\ \nabla u_2 = \cos \varphi \nabla \varphi = u_1 \nabla \varphi \end{cases} \quad (1.24)$$

Utilizzando le (1.24)

$$u \times u_\tau = u_1 \nabla u_2 \cdot \tau - u_2 \nabla u_1 \cdot \tau = (u_1^2 + u_2^2) \nabla \varphi \cdot \tau = \varphi_\tau \quad (1.25)$$

visto che $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} [\varphi]_p &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\varphi(\gamma_p(2\pi - \varepsilon)) - \varphi(\gamma_p(\varepsilon))\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \frac{d}{dt} \varphi(\gamma_p(t)) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \varphi_\tau dt \stackrel{(1.25)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} u \times u_\tau dt \\ &= \int_0^{2\pi} u \times u_\tau dt = 2\pi \deg(u; \Gamma) . \end{aligned}$$

ottenendo la (1.23).

Passo 2. Sia $u \in C(\Gamma; S^1)$ in modo che $\varphi \in C(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$. Approssimiamo uniformemente φ con una successione $\varphi_n \in C^\infty(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$ e definiamo $u_n := e^{i\varphi_n}$. Essendo le $u_n \in C^\infty(\Gamma \setminus \{p\}; \mathbb{R})$ vale la (1.23):

$$[\varphi_n]_p = 2\pi \deg(u_n; \Gamma) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} . \quad (1.26)$$

Usando la disuguaglianza

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\|u_n - u\|_\infty \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty$$

cioè $u_n \rightarrow u$ uniformemente. Per la stabilità del grado rispetto alla convergenza uniforme si ha

$$\deg(u_n; \Gamma) \rightarrow \deg(u; \Gamma) . \quad (1.27)$$

Inoltre, poiché $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente, anche

$$[\varphi_n]_p \rightarrow [\varphi]_p . \quad (1.28)$$

Passando al limite nella (1.26), dalle (1.27) e (1.28) otteniamo la tesi. \square

Siamo pronti a dimostrare il Teorema 1.22.

Dimostrazione del Teorema 1.22. Scegliamo un punto $p \in \Gamma$ e poniamo $I = \Gamma \setminus \{p\}$. Dal Teorema 1.21 esiste $\varphi \in C^k(I; \mathbb{R})$ tale che

$$u = e^{i\varphi} \quad \text{per ogni } x \in I. \quad (1.29)$$

Per la (1.29) si ha che φ si estende in modo C^k ad un lifting di u su tutta Γ se e soltanto se φ è continua in p , il che accade se e soltanto se

$$[\varphi]_p = 0. \quad (1.30)$$

Dal Teorema 1.24 abbiamo che vale la (1.30) se e soltanto se

$$\deg(u; \Gamma) = 0.$$

L'ultima parte dell'enunciato si prova come nel Teorema 1.13. □

1.4 Gli spazi $C_g(\Omega; \mathbf{S}^1)$, $C_g(\Omega_0; \mathbf{S}^1)$ e $C(\Omega_\varepsilon; \mathbf{S}^1)$

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, semplicemente connesso con frontiera regolare. In questo modo la frontiera $\partial\Omega$ è diffeomorfa ad S^1 . Assegnamo un dato al bordo regolare

$$g: \partial\Omega \rightarrow S^1$$

e consideriamo lo spazio funzionale

$$C_g^k(\Omega; S^1) = \{u \in C^k(\Omega; S^1) : u = g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Il risultato fondamentale per questo spazio è dato dal seguente teorema:

Teorema 1.25. *Sia $g \in C^k(\partial\Omega; S^1)$. Sono equivalenti:*

1. $\deg(g; \partial\Omega) = 0$;
2. $C_g^k(\Omega; S^1) \neq \emptyset$.

La prima osservazione da fare per arrivare alla dimostrazione del teorema è la seguente:

Lemma 1.26. *Se $u \in C(\Omega; S^1)$ allora*

$$\deg(u; \partial\Omega) = 0$$

Intuitivamente è chiaro cosa succede: essendo Ω semplicemente connesso, la frontiera $\partial\Omega$ è contraibile ad un punto $p \in \Omega$. Ma $\deg(u; \{p\}) = 0$ e quindi per invarianza del grado rispetto all'omotopia di cammini si ha

$$\deg(u; \partial\Omega) = \deg(u; \{p\}) = 0.$$

Diamo una dimostrazione rigorosa:

Dimostrazione. Passo 1. Supponiamo prima che u sia $C^1(\Omega; S^1)$. Per la Proposizione 1.16 abbiamo che $J(u) = 0$ in Ω . Per il Teorema 1.8 possiamo calcolare il grado di u con la formula (1.5) ottenendo

$$\deg(u; \partial\Omega) \stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} J(u) = 0.$$

Passo 2. Se $u \in C(\Omega; S^1)$ per la Proposizione 1.14 esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ uniformemente sui compatti di Ω . Quindi in particolare $u_n \rightarrow u$ uniformemente su $\partial\Omega$. Dal passo precedente si ha

$$\deg(u_n; \partial\Omega) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (1.31)$$

Per la stabilità del grado rispetto alla convergenza uniforme, si ha

$$\deg(u_n; \partial\Omega) \rightarrow \deg(u; \partial\Omega)$$

e quindi dalla (1.31) segue la tesi. \square

Passiamo alla dimostrazione del Teorema 1.25.

Dimostrazione del Teorema 1.25. Se $u \in C_g^k(\Omega; S^1)$ per il Lemma 1.26 abbiamo $\deg(u; \partial\Omega) = 0$ e quindi $\deg(g; \partial\Omega) = 0$.

Viceversa, supponiamo che $\deg(g; \partial\Omega) = 0$. Per il Teorema 1.22 esiste un suo lifting $\varphi \in C^k(\partial\Omega; \mathbb{R})$. Estendiamo φ ad una funzione armonica in Ω e poniamo $u = e^{i\varphi}$. In questo modo $u \in C_g^k(\Omega; S^1)$ che è quindi non vuoto. \square

Per le nostre applicazioni siamo però interessati al caso di g tale che

$$\deg(g; \partial\Omega) \neq 0.$$

In questo caso il Teorema 1.25 ci dice che

$$C_g(\Omega; S^1) = \emptyset. \quad (1.32)$$

Il motivo per cui questo accade è che qualsiasi estensione $u: \Omega \rightarrow S^1$ di g tende a sviluppare delle singolarità all'interno di Ω , da cui la (1.32). L'esempio che abbiamo in mente è sempre il solito:

Esempio 1.27. Sia $\Omega = B_1(0)$ in modo che $\partial\Omega = S^1$ e consideriamo il dato al bordo $g(x) = x^k$ con $k \neq 0$. Sappiamo che

$$\deg(x^k; S^1) = k \neq 0$$

dunque

$$C_{x^k}(B_1(0); S^1) = \emptyset.$$

Consideriamo tuttavia l'estensione naturale a valori in S^1 di g :

$$u(x) = \frac{x^k}{|x|^k}.$$

Notiamo che u è continua in $\Omega \setminus \{0\}$, quindi

$$C_{x^k}(\Omega \setminus \{0\}; S^1) \neq \emptyset.$$

■

L'esempio precedente suggerisce che rimuovendo alcuni punti da Ω si possono trovare estensioni continue di g a valori in S^1 .

Fissiamo quindi $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ e consideriamo l'insieme

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Teorema 1.28. *Se $g \in C^k(\partial\Omega; S^1)$ si ha $C_g^k(\Omega_0; S^1) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Costruiamo una $u \in C_g^k(\Omega_0; S^1)$. Siano $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ scelti in modo tale che

$$\sum_{i=1}^N d_i = \deg(g; \partial\Omega) \quad (1.33)$$

e definiamo la funzione

$$h(x) := \prod_{i=1}^N \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}.$$

Notiamo che $h \in C^\infty(\Omega_0; S^1)$. Ricordando le proprietà del grado (si veda la Proposizione 1.9) si ha

$$\deg(h; \partial\Omega) = \sum_{i=1}^N \deg\left(\frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}; \partial\Omega\right) = \sum_{i=1}^N d_i.$$

Quindi

$$\deg(g\bar{h}; \partial\Omega) = \deg(g; \partial\Omega) - \deg(h; \partial\Omega) \stackrel{(1.33)}{=} 0$$

e per il Teorema 1.22 esiste una $\varphi \in C^k(\partial\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$g\bar{h} = e^{i\varphi} \quad \text{su} \quad \partial\Omega. \quad (1.34)$$

Sia $\tilde{\varphi}$ l'estensione armonica in Ω di φ e poniamo $u = h e^{i\tilde{\varphi}}$. In questo modo $u \in C^k(\Omega_0; S^1)$ e per la (1.34) si ha $u = g$ su $\partial\Omega$. \square

Quando tratteremo l'analogo caso per funzioni di Sobolev, non sarà sufficiente rimuovere da Ω un numero finito di punti, ma andranno rimossi dei dischetti centrati in tali punti. Per uniformare le notazioni, trattiamo in questo modo anche il caso continuo. Si fissi $\varepsilon > 0$ che verifichi

1. $|x_i - x_j| > \varepsilon$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq N$
2. $\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, N$

in modo tale che, posti $B_i = B_\varepsilon(x_i)$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B}_i$ si abbiano

1. Ω_ε aperto connesso;
2. $\pi_1(\Omega_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^N$, ovvero Ω_ε ha esattamente N buchi (si veda la Figura 1.1).

Teorema 1.29. *Se $g \in C^k(\partial\Omega; S^1)$ si ha $C_g^k(\Omega_\varepsilon; S^1) \neq \emptyset$. In particolare, assegnati i gradi $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ tali che soddisfino alla condizione di compatibilità*

$$\sum_{i=1}^N d_i = \deg(g; \partial\Omega)$$

esiste almeno una funzione $u \in C_g^k(\Omega_\varepsilon; S^1)$ tale che

$$\deg(u; \partial B_i) = d_i \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, N.$$

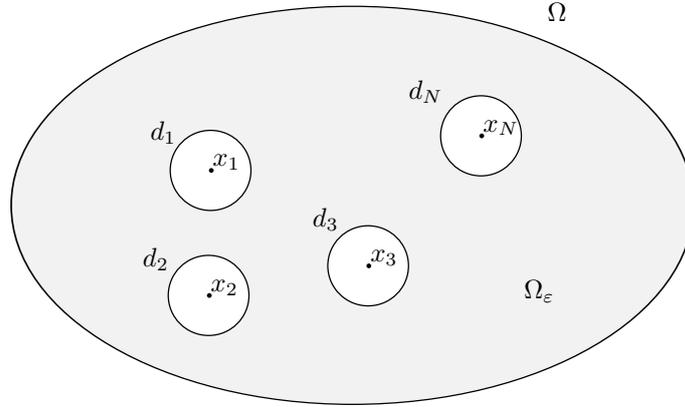


Figura 1.1: Dominio Ω_ε

La dimostrazione di questo teorema è la stessa del Teorema 1.28. Concludiamo questo paragrafo con una osservazione. Se $u \in C(\Omega_\varepsilon; S^1)$ possiamo definire il grado di u rispetto a $\partial\Omega_\varepsilon$ come

$$\deg(u; \partial\Omega_\varepsilon) := \deg(u; \partial\Omega) - \sum_{i=1}^N \deg(u; \partial B_i) .$$

Proposizione 1.30. *Se $u \in C(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$ allora $\deg(u; \partial\Omega_\varepsilon) = 0$.*

Dimostrazione. Passo 1. Supponiamo che u sia C^2 . Ricordando la formula (1.7) si ha

$$2\pi \deg(u; \partial\Omega_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} u \times u_\tau - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} u \times u_\tau = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \omega = \int_{\Omega_\varepsilon} d\omega \quad (1.35)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il Teorema di Stokes. Essendo u una funzione C^2 , come nella dimostrazione del Teorema 1.8 abbiamo

$$d\omega = 2J(u) dx_1 \wedge dx_2 .$$

Inoltre dalla Proposizione 1.16 si ha $J(u) = 0$ in Ω_ε , da cui

$$d\omega = 0 . \quad (1.36)$$

Sostituendo la (1.36) nella (1.35) otteniamo la tesi.

Passo 2. Se u è solo continua, procedendo come nella Proposizione 1.14 esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ sui compatti di $\bar{\Omega}_\varepsilon$. Essendo la tesi vera per funzioni regolari e il grado stabile per convergenza uniforme, segue la tesi. \square

1.5 Lifting in $C(\Omega_\varepsilon; S^1)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, semplicemente connesso con frontiera regolare e Ω_ε come nel precedente paragrafo.

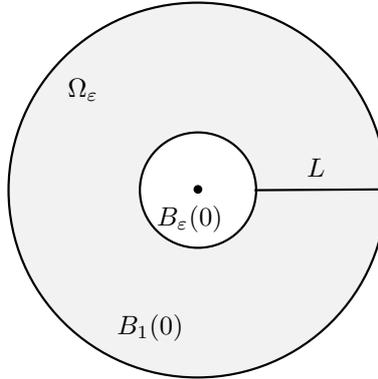


Figura 1.2: $\Omega_\varepsilon = B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$

Nel Paragrafo 1.2 abbiamo caratterizzato mediante il concetto di lifting le funzioni di $C(\Omega; S^1)$: il Teorema 1.13 ci dice che vale l'uguaglianza tra insiemi

$$C(\Omega; S^1) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in C(\Omega; \mathbb{R})\} .$$

In questo paragrafo ci occuperemo del problema del lifting di funzioni in $C(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Vediamo cosa accade nell'esempio modello:

Esempio 1.31. Sia $\Omega = B_1(0)$ ed $\Omega_\varepsilon = B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ in modo che la funzione

$$u(x) = \frac{x^k}{|x|^k}$$

sia in $C(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Un lifting di u è dato dalla funzione $\theta(x) = k \operatorname{Arg}(x)$, che ha un salto di $2k\pi$ sulla semiretta uscente dall'origine

$$R = \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\} .$$

In tal modo, se indichiamo con $L = \Omega_\varepsilon \cap R$ taglio in Ω_ε (si veda la Figura 1.2), il lifting è $\theta \in C(\Omega_\varepsilon \setminus L; \mathbb{R})$. ■

La situazione che si presenta nell'esempio è del tutto generale: i lifting di funzioni $C(\Omega_\varepsilon; S^1)$ presentano dei salti su tagli del dominio Ω_ε .

Fissiamo le notazioni: il lifting della funzione

$$\frac{x - x_i}{|x - x_i|}$$

lo indichiamo con $\theta_{x_i}(x) = \operatorname{Arg}(x - x_i)$ in modo che abbia un salto di 2π sulla semiretta

$$R_{x_i} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} x_i, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} x_i\} .$$

Introduciamo i tagli $L_{x_i} = \Omega_\varepsilon \cap R_{x_i}$ e il dominio privato dei tagli

$$\Omega_L = \Omega_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^N L_{x_i}$$

(si veda la Figura 1.3).

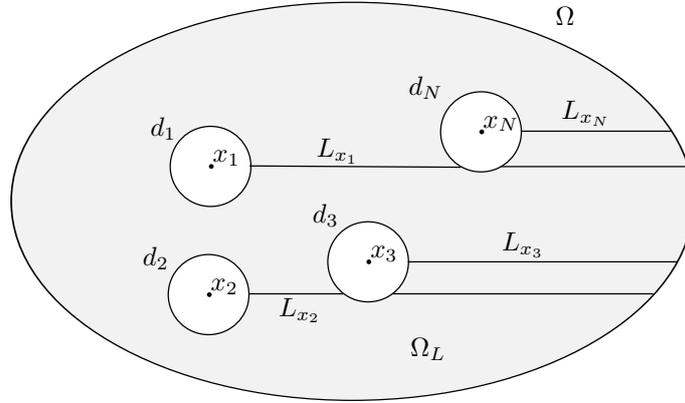


Figura 1.3: Ω_L

Teorema 1.32. Sia $u \in C^k(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Allora esiste $\varphi \in C^k(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R})$ tale che

$$u = e^{i(\varphi + \Psi)} \quad \text{su} \quad \Omega_\varepsilon \quad (1.37)$$

con

$$\Psi = \sum_{i=1}^N d_i \theta_{x_i}$$

dove $d_i = \deg(u; \partial B_i)$. In particolare u ammette lifting in $C^k(\Omega_L; \mathbb{R})$ che ha salto costante pari a $2\pi d_i$ sul segmento L_{x_i} .

Se φ_1 e φ_2 sono due funzioni continue su Ω_ε che soddisfano la (1.37) allora differiscono per un multiplo intero di 2π .

Dimostrazione. Sia

$$h(x) = \prod_{i=1}^N \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}$$

in modo che $h = e^{i\Psi}$. Osserviamo che $\deg(h; \partial B_i) = d_i$. Quindi se introduciamo la funzione $w := u \bar{h}$ si ha

$$\deg(w; \partial B_i) = \deg(u; \partial B_i) - \deg(h; \partial B_i) = d_i - d_i = 0.$$

Dal Teorema 1.22 segue che

$$C_w^k(B_i; S^1) \neq \emptyset$$

e quindi possiamo estendere w ad una funzione $\tilde{w} \in C^k(\Omega; S^1)$. Per tale estensione, dal Teorema 1.13, esiste $\varphi \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $\tilde{w} = e^{i\varphi}$ in Ω per cui

$$u \bar{h} = e^{i\varphi} \quad \text{su} \quad \Omega_\varepsilon.$$

Moltiplicando quest'ultima per h otteniamo la (1.37). Dal momento che $\Psi \in C^k(\Omega_L; \mathbb{R})$ segue che il lifting $\varphi + \Psi$ è in $C^k(\Omega_L; \mathbb{R})$.

La seconda parte della dimostrazione procede come nel Teorema 1.13 essendo Ω_ε connesso. \square

1.6 Grado topologico per funzioni $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$

Nel seguito ci occuperemo di estendere gli argomenti trattati nei precedenti paragrafi alle funzioni Sobolev. Per prima cosa vogliamo definire una opportuna nozione di grado topologico per funzioni $H^{1/2}$. Sia quindi $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva diffeomorfa ad S^1 e indichiamo con dx la misura di Hausdorff su Γ . Indichiamo con $A \subset \mathbb{R}^2$ il dominio tale che $\partial A = \Gamma$.

Richiamiamo qualche fatto utile sugli spazi di tracce (si vedano [L], [A], [B2], [E]). Esiste un operatore lineare e continuo, detto operatore traccia

$$T: H^1(A; \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbb{R}^2)$$

tale che $T(u) = u|_{\Gamma}$ se $u \in H^1(A; \mathbb{R}^2) \cap C(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$. Lo spazio delle tracce è

$$H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\Gamma; \mathbb{R}^2) : \|u\|_{H^{1/2}} < +\infty\}$$

dove $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$ è la norma definita da

$$\|u\|_{H^{1/2}}^2 = \int_{\Gamma} |u(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy.$$

Si ha che

$$\ker T = H_0^1(A; \mathbb{R}^2) \quad T(H^1(A; \mathbb{R}^2)) = H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$$

e inoltre T è continuo da $H^1(A; \mathbb{R}^2)$ in $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$. Si ricordi infine che $\text{Lip}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$ è contenuto in $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$ con immersione continua, mentre in generale ci sono funzioni $C(\Gamma; \mathbb{R}^2)$ che non sono in $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$ (siamo nel caso limite delle immersioni di Sobolev). Definiamo lo spazio

$$H^{1/2}(\Gamma; S^1) = \{u \in L^2(\Gamma; \mathbb{R}^2) : \|u\|_{H^{1/2}} < +\infty, |u| = 1 \text{ q.o. in } \Gamma\}.$$

Visto che le funzioni in $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ non sono necessariamente continue la definizione di grado data nel Paragrafo 1.1 non si applica.

Ci sono vari modi equivalenti di definire il grado in $H^{1/2}$. Seguiamo l'approccio di H. Brezis e L. Nirenberg in [BN1] e [BN2], omettendo le dimostrazioni più elaborate e dando solo le idee principali. In realtà in questi articoli il grado è definito per funzioni VMO (la chiusura in norma BMO del sottoinsieme delle funzioni regolari), ma essendo $H^{1/2} \subset VMO$ e $H^{1/2} \subset BMO$, quest'ultima con immersione continua, i risultati si applicano al nostro caso.

La definizione è data tramite un argomento di approssimazione, come abbiamo fatto per definire il grado di funzioni continue a partire da quelle C^1 . Accenniamo al procedimento, considerando il caso di $\partial\Omega = S^1$ per non appesantire le notazioni. Sia $u \in H^{1/2}(S^1; S^1)$ e consideriamo la sua media sugli archi di S^1 di lunghezza 2ε , cioè definiamo $\bar{u}_\varepsilon: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ come

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u(y) dy \tag{1.38}$$

dove dy è la misura di Hausdorff su S^1 . Si può dimostrare che $\bar{u}_\varepsilon \in C^1(S^1; \mathbb{R}^2)$ e $|u_\varepsilon| \rightarrow 1$ uniformemente per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si pone quindi

$$u_\varepsilon = \frac{\bar{u}_\varepsilon}{|\bar{u}_\varepsilon|}$$

in modo che $u_\varepsilon \in C^1(S^1; S^1)$. Si dimostra che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in norma $H^{1/2}$. Essendo le u_ε regolari il loro grado è definito dalla

$$\deg(u; S^1) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} u \times u_\tau. \quad (1.39)$$

Osserviamo che per ε ed ε' piccoli le funzioni u_ε ed $u_{\varepsilon'}$ sono omotope, con omotopia data da $u_{t\varepsilon' + (1-t)\varepsilon}$, per $0 \leq t \leq 1$. Per invarianza omotopica del grado segue che $\deg(u_\varepsilon; S^1) = \deg(u_{\varepsilon'}; S^1)$ per $\varepsilon, \varepsilon'$ abbastanza piccoli. Possiamo allora dare la seguente definizione di grado:

Definizione 1.33 (Grado topologico in $H^{1/2}(S^1; S^1)$). Se $u \in H^{1/2}(S^1; S^1)$ la quantità

$$\deg(u; S^1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \deg(u_\varepsilon; S^1)$$

si dice grado topologico di u rispetto ad S^1 .

Analogamente si definisce il grado in $H^{1/2}(\partial\Gamma; S^1)$. Vale il seguente fondamentale teorema di stabilità (per la cui dimostrazione si veda il Teorema 1 in [BN1]):

Teorema 1.34. *Sia $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$. Allora esiste $\delta > 0$ dipendente da u tale che se*

$$\|u - v\|_{H^{1/2}} < \delta$$

allora

$$\deg(v; \Gamma) = \deg(u; \Gamma).$$

Osserviamo che a differenza del Lemma 1.5 nel quale $\delta = 1$ andava bene per tutte le funzioni $u \in C(\Gamma; S^1)$, il δ del Teorema 1.34 dipende veramente dalla u scelta, nel senso che per ogni $\delta > 0$ si possono costruire funzioni

$$u, v \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$$

tali che

$$\|u - v\|_{H^{1/2}} < \delta$$

ma

$$\deg(u; \Gamma) = 0 \quad \deg(v; \Gamma) = k$$

con $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario (si vedano [BN1, Lemma 6] e [BN1, Remark 6]).

Dal Teorema 1.34 segue anche che la definizione di grado non dipende dalla successione scelta: possiamo considerare una qualsiasi successione $\{u_n\}$ in $C^1(\Gamma; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $H^{1/2}$ e porre $\deg(u; \partial\Omega) = \lim_n \deg(u_n; \partial\Omega)$. Possiamo quindi dare la seguente definizione equivalente:

Definizione 1.35 (Grado topologico in $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$). Sia $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$. Si scelga una successione $\{u_n\}$ in $C^1(\Gamma; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $H^{1/2}$. Il limite

$$\deg(u; \Gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(u_n; \Gamma)$$

si dice grado topologico di u rispetto a Γ .

Proposizione 1.36. *Il grado appena definito è un numero intero. Inoltre se $u \in u \in C(\Gamma; S^1) \cap H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ la nozione di grado in $H^{1/2}$ coincide con quella data nel Paragrafo 1.1 per funzioni continue.*

Dimostrazione. Il fatto che $\deg(u; \Gamma) \in \mathbb{Z}$ segue perché è definito come il limite di una successione di numeri interi. Se poi $u \in C(\Gamma; S^1) \cap H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ è immediato vedere che le u_ε definite in (1.38) convergono ad u anche in norma uniforme, per cui dal Lemma 1.5 le due definizioni di grado coincidono. \square

Una utile formula per il calcolo del grado di funzioni $C(\Gamma; S^1)$ è data dalla (1.5). Come provato in [BN1, Property 5] questa si generalizza al caso $H^{1/2}$:

Teorema 1.37. *Sia $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$. Allora*

$$\deg(u; \Gamma) = \frac{1}{\pi} \int_A J(\tilde{u}) \quad (1.40)$$

dove A è il dominio tale che $\partial A = \Gamma$, $\tilde{u} \in H^1(A; \mathbb{R}^2)$ è una qualsiasi estensione di u in A e $J(\tilde{u})$ è lo Jacobiano di \tilde{u} .

Si noti che l'estensione \tilde{u} non è in generale a valori in S^1 (le estensioni a valori in S^1 verranno trattate nel seguito) e ne esiste almeno una perché $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$ è caratterizzato come spazio di tracce e si ha l'inclusione $H^{1/2}(\Gamma; S^1) \subset H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^2)$.

La dimostrazione del Teorema 1.37 si basa sul seguente risultato di densità, provato da R. Schoen e K. Uhlenbeck in [SU].

Lemma 1.38. *$C^\infty(\Gamma; S^1)$ è denso in $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ in norma $H^{1/2}$.*

Cenno di dimostrazione. L'idea per provare il lemma è la stessa utilizzata per introdurre il grado in $H^{1/2}$ (si veda H. Brezis in [B1]). In questo modo si prova la densità delle funzioni C^1 in $H^{1/2}$ nella norma $H^{1/2}$. Dalla Proposizione 1.3 si ha che $C^\infty(\Gamma; S^1)$ è denso in $C^1(\Gamma; S^1)$ in norma uniforme. Infine, poiché l'inclusione $C^1(\Gamma; S^1) \subset H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ è continua, segue la tesi. \square

Per procedere alla dimostrazione del Teorema 1.37 abbiamo bisogno del seguente corollario (si veda [BN1, Lemma A.13]):

Corollario 1.39. *Sia A il dominio tale che $\partial A = \Gamma$ ed $u \in H^1(A; \mathbb{R}^2)$ tale che la sua traccia sia a valori in S^1 , cioè $u|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$. Allora esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $H^1(A; \mathbb{R}^2)$ e $u_n(\Gamma) \subset S^1$.*

Possiamo procedere alla dimostrazione del Teorema.

Dimostrazione del Teorema 1.37. Consideriamo come nel Corollario 1.39 una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$ tale che $u_n \rightarrow \tilde{u}$ in $H^1(A; \mathbb{R}^2)$ e $u_n(\Gamma) \subset S^1$. Essendo le u_n regolari, dalla (1.5) si ha

$$\deg(u_n; \Gamma) = \frac{1}{\pi} \int_A J(u_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (1.41)$$

Per la disuguaglianza di traccia abbiamo

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma; S^1)$$

e quindi dal Teorema 1.34 segue

$$\deg(u_n; \Gamma) \rightarrow \deg(u; \Gamma). \quad (1.42)$$

Dal fatto che $u_n \rightarrow \tilde{u}$ in H^1 segue che

$$J(u_n) \rightarrow J(\tilde{u}) \quad \text{in } L^1(A; \mathbb{R}^2). \quad (1.43)$$

Grazie alle (1.42) e (1.43) possiamo passare al limite nella (1.41) e ottenere la tesi. \square

Vediamo una applicazione di questo teorema al solito esempio.

Esempio 1.40. Consideriamo $\Gamma = S^1$ ed $u: S^1 \rightarrow S^1$ definita da $u(x) = x$. Si ha che $u \in H^{1/2}(S^1; S^1)$ essendo una funzione regolare. Vogliamo calcolare $\deg(u; S^1)$ utilizzando la (1.40). Estendiamo u alla funzione

$$\hat{u}(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{per } x \neq 0.$$

Poiché

$$\nabla u(x) = \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{per } x \neq 0$$

allora

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{|x|}$$

e quindi $\hat{u} \notin H^1(B_1(0); \mathbb{R}^2)$ e non va bene come prolungamento. Per ottenere una estensione $\tilde{u} \in H^1(B_1(0); \mathbb{R}^2)$ tagliamo la singolarità di \hat{u} nell'origine: definiamo

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0) \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{se } x \in \overline{B_\varepsilon(0)} \end{cases}$$

con $\varepsilon \in (0, 1)$ fissato. Si ha $\tilde{u} \in H^1(B_1(0); \mathbb{R}^2)$, con Jacobiano

$$J(\tilde{u})(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0) \\ \frac{1}{\varepsilon^2} & \text{se } x \in \overline{B_\varepsilon(0)} \end{cases}$$

e allora

$$\deg(u; S^1) = \frac{1}{\pi} \int_{B_1(0)} J(\tilde{u}) = \frac{1}{\pi} \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\varepsilon^2} = 1.$$

1.7 Lifting in $H^1(\Omega; S^1)$ con Ω semplicemente connesso

In questo paragrafo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto semplicemente connesso, limitato e con frontiera regolare. Siamo interessati al problema del lifting in $H^1(\Omega; S^1)$. Dal momento che le funzioni di $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ non sono necessariamente continue, una definizione di lifting ha senso solamente q.o. in Ω :

Definizione 1.41. Sia $u \in H^1(\Omega; S^1)$. Una funzione

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$u = e^{i\varphi} \quad \text{q.o. in } \Omega \quad (1.44)$$

si dice *lifting* di u su Ω .

Vedremo che tutti i risultati presentati nel Paragrafo 1.2 nel caso regolare si generalizzano al contesto degli spazi di Sobolev. In parallelo con il Teorema 1.13 abbiamo:

Teorema 1.42. Sia $u \in H^1(\Omega; S^1)$, allora esiste $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$u = e^{i\varphi} \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Inoltre se $\psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ è un altro lifting di u allora

$$\varphi = \psi + 2k\pi \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

per $k \in \mathbb{Z}$ opportuno.

La strategia per dimostrare questo teorema è la stessa che abbiamo seguito nel caso regolare. Assumiamo quindi che valga la relazione (1.44) e deriviamo delle condizioni soddisfatte da u e φ .

Lemma 1.43. Siano $u \in H^1(\Omega; S^1)$ e $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tali che valga (1.44). Allora

$$|\nabla u| = |\nabla \varphi| \quad \text{q.o. in } \Omega \quad (1.45)$$

e

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{q.o. in } \Omega \quad (1.46)$$

che scriviamo in forma compatta come

$$\nabla \varphi = u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1.$$

Viceversa, supponiamo che u e φ soddisfino le (1.46). Allora

$$u = e^{i(\varphi+c)} \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

per una opportuna costante $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la relazione

$$u = e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Applicando a quest'ultima il teorema di derivazione delle funzioni composte in spazi di Sobolev (si veda la Proposizione 9.5 a pagina 270 di [B2]) si ottenegono

$$\nabla u_1 = -u_2 \nabla \varphi, \quad (1.47)$$

$$\nabla u_2 = u_1 \nabla \varphi. \quad (1.48)$$

In particolare quindi

$$|\nabla u|^2 = |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 = (u_1^2 + u_2^2) |\nabla \varphi|^2 = |\nabla \varphi|^2$$

perché $|u| = 1$ q.o. in Ω . Se poi moltiplichiamo per $-u_2$ la (1.47), per u_1 la (1.48) e sommiamo otteniamo le (1.46).

Viceversa, supponiamo che u e φ soddisfino le (1.46) e consideriamo la funzione $w = u e^{-i\varphi}$ (si intende il prodotto in \mathbb{C}). Per il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che $w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e se indichiamo il complesso coniugato con $\bar{u} = u_1 - iu_2 = (u_1, -u_2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla w &= \nabla u e^{-i\varphi} - i \nabla \varphi u e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} (\nabla u - iu \nabla \varphi) \\ &= u e^{-i\varphi} (\bar{u} \nabla u - i\varphi) = 0 \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned}\bar{u} \nabla u &= (u_1 - iu_2)(\nabla u_1 + i\nabla u_2) \\ &= u_1 \nabla u_1 + u_2 \nabla u_2 + i(u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1) = i\nabla \varphi\end{aligned}$$

per le (1.46) e perché dalle (1.47) e (1.48) si ha $u_1 \nabla u_1 = -u_1 u_2 \nabla \varphi = -u_2 \nabla u_2$. Poiché $\nabla w = 0$ in Ω connesso esiste una costante $a \in \mathbb{R}^2$ tale che $w = a$ q.o. in Ω . Ma $|w| = 1$ e quindi $|a| = 1$ ed esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a = e^{ic}$, da cui $u = e^{i(\varphi+c)}$. \square

Dunque trovare un lifting di u equivale a risolvere le (1.46). Notiamo che se $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ il suo differenziale in coordinate si scrive

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2$$

Introduciamo la 1-forma a coefficienti in $L^2(\Omega; \mathbb{R})$

$$\omega = \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2. \quad (1.49)$$

La risoluzione delle (1.46) equivale allora alla soluzione di

$$d\varphi = \omega$$

ovvero a trovare un potenziale H^1 per la 1-forma ω . Nel caso di u regolare questo problema si risolveva con il Lemma di Poincaré. Nel caso di $u \in H^1(\Omega; S^1)$ vale una versione generalizzata del lemma:

Lemma 1.44 (Lemma di Poincaré). *Sia $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ con $1 \leq p < +\infty$ e consideriamo la 1-forma a coefficienti L^p*

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2.$$

Sono equivalenti

1. ω è esatta, cioè esiste $\varphi \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $\omega = d\varphi$, ovvero

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

2. ω è chiusa nel senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_{\Omega} f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \int_{\Omega} f_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \text{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}). \quad (1.50)$$

Cenno di dimostrazione. Diamo una idea della dimostrazione, che può essere trovata per esteso nel Lemma 3 di [BBM]. Se ω è esatta, dalla definizione di derivata debole è banalmente chiusa.

Viceversa, supponiamo che ω sia chiusa e indichiamo con $f = (f_1, f_2)$. Estendiamo f a zero fuori da Ω e consideriamo $\bar{f}^\varepsilon = \rho_\varepsilon * f$, dove i ρ_ε sono una successione di mollificatori. Usando la (1.50) si dimostra che $\bar{f}^\varepsilon = (\bar{f}_1^\varepsilon, \bar{f}_2^\varepsilon)$ soddisfa la condizione di chiusura

$$\frac{\partial \bar{f}_1^\varepsilon}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{f}_2^\varepsilon}{\partial x_1}$$

sui compatti di Ω (per ε abbastanza piccolo). Dal Lemma di Poincaré classico \bar{f}^ε ammette un potenziale locale Ψ_ε su ogni $U \subset\subset \Omega$, ovvero

$$\nabla \Psi_\varepsilon = \bar{f}^\varepsilon \quad \text{su } U.$$

Passando al limite in quest'ultima otteniamo che esiste una $\Psi \in W^{1,p}(U; \mathbb{R})$ tale che

$$\nabla \Psi = f \quad \text{su } U.$$

Se prendiamo una famiglia di compatti $\{U_n\}$ che invade Ω otteniamo una successione $\{\Psi_n\}$ tale che

$$\nabla \Psi_n = f \quad \text{su } U_n.$$

Da questo si può dimostrare che $\Psi_n \rightarrow \varphi$ con $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$\nabla \varphi = f \quad \text{su } \Omega. \quad (1.51)$$

Dalla (1.51) si conclude che $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, che insieme alla (1.51) ci dà la tesi. \square

Diamo ora due proposizioni:

Proposizione 1.45. *Sia $u \in H^1(\Omega; S^1)$. Allora $J(u) = 0$ q.o. in Ω .*

Dimostrazione. Poiché u a valori in S^1 vale

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad (1.52)$$

Derivandola (usiamo sempre il teorema di derivazione delle funzioni composte [B2, Prop. 9.5]) si ottiene

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ per } i = 1, 2$$

cioè u è ortogonale al vettore $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ per $i = 1, 2$. Da questo segue che $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sono paralleli, cioè

$$J(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega$$

che è la tesi. \square

Proposizione 1.46. *Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e connesso. Se $u \in H^1(U; \mathbb{R})$ è a valori in \mathbb{Z} , ovvero tale che*

$$u(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{per q.o. } x \in U$$

allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$u = k \quad \text{q.o. in } U.$$

In simboli

$$H^1(U; \mathbb{Z}) = \{u \in H^1(U; \mathbb{R}) : u = k \text{ q.o. in } U \text{ per } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dimostrazione. Sia $u \in H^1(\Omega; \mathbb{Z})$. Possiamo decomporre U nei sottoinsiemi di livello di u :

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k$$

con

$$E_k = \{x \in U : u(x) = k\}.$$

Per un Teorema di Stampacchia (si veda [GT] Lemma 7.7) le funzioni di Sobolev hanno gradiente nullo sugli insiemi di livello, cioè

$$\nabla u = 0 \quad \text{q.o. su } E_k$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ma gli E_k sono a due a due disgiunti e la misura di Lebesgue è numerabilmente additiva, quindi

$$|U| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |E_k|$$

che implica

$$\nabla u = 0 \quad \text{q.o. in } U. \quad (1.53)$$

Poiché U connesso, dalla (1.53) segue che u è costante su U . D'altra parte u è a valori in \mathbb{Z} , dunque esiste un qualche $k \in \mathbb{Z}$ tale che $u = k$ q.o. in U . \square

Siamo pronti a dimostrare il Teorema 1.42.

Dimostrazione del Teorema 1.42. Per quanto detto nel Lemma 1.43, per trovare un lifting di u è sufficiente trovare un potenziale per la 1-forma ω definita in (1.49), ovvero una $\theta \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad (1.54)$$

Per il Lemma di Poincaré questo equivale a provare che $d\omega = 0$ nel senso delle distribuzioni, cioè che

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}). \quad (1.55)$$

Se dimostriamo che vale la (1.55) per il Lemma di Poincaré esiste una qualche $\theta \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che valgono le (1.54) e quindi dal Lemma 1.43 esiste una $c \in \mathbb{R}$ tale che $\theta + c$ è lifting di u in Ω , concludendo la dimostrazione.

Abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema 1.13 che la (1.55) è banalmente verificata se u è regolare. Dimostriamola allora per densità. Dalla teoria classica degli spazi di Sobolev ([B2]) sappiamo che $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ è denso in $H^1(\Omega; S^1)$. Esiste quindi una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tale che $\|u_n\|_\infty \leq 1$ e $u_n \rightarrow u$ in H^1 (si noti che non si sta dicendo che le u_n assumono valori in S^1). Essendo le u_n regolari, se $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n})$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right) = 2J(u_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Moltiplicando quest'ultima per una funzione test $\psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ e integrando su Ω si ottiene

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right) \right\} \psi = 2 \int_{\Omega} J(u_n) \psi.$$

Integrando per parti il termine di sinistra si ottiene infine

$$- \int_{\Omega} \left\{ \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \left(u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\} = 2 \int_{\Omega} J(u_n) \psi. \quad (1.56)$$

Poiché $u_n \rightarrow u$ in H^1 segue che $J(u_n) \rightarrow J(u)$ in L^1 da cui

$$2 \int_{\Omega} J(u_n) \psi \rightarrow 2 \int_{\Omega} J(u) \psi = 0 \quad (1.57)$$

essendo $J(u) = 0$ q.o. in Ω per la Proposizione 1.45. Inoltre

$$u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow u \times \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{in } L^2(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{per } i = 1, 2. \quad (1.58)$$

Tenendo conto della (1.57) e della (1.58) possiamo passare al limite nella (1.56) per ottenere

$$- \int_{\Omega} \left\{ \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\} = 0$$

ovvero la (1.55).

Supponiamo ora che $\varphi, \psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ siano due lifting di u , cioè che

$$e^{i\varphi} = e^{i\psi} \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Dunque esiste un insieme misurabile E tale che $|E| = |\Omega|$ e che

$$e^{i\varphi(x)} = e^{i\psi(x)} \quad \text{per ogni } x \in E. \quad (1.59)$$

La (1.59) definisce una funzione $k: E \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che

$$\varphi(x) = \psi(x) + 2k(x)\pi \quad \text{per ogni } x \in E$$

da cui $k \in H^1(\Omega; \mathbb{Z})$. Poiché Ω è connesso vale la Proposizione 1.46, cioè esiste un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $k = k_0$ q.o. in Ω da cui la tesi. \square

Concludiamo questo paragrafo con un risultato di densità analogo a quello dato per funzioni continue nella Proposizione 1.14.

Teorema 1.47. *Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato con frontiera regolare. Lo spazio $C^\infty(\bar{U}; S^1)$ è denso in $H^1(U; S^1)$ rispetto alla norma H^1 .*

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [B1, Lemma 2] oppure in [SU] e l'idea è simile a quella usata nella dimostrazione della Proposizione 1.14:

Cenno di dimostrazione. Si considera la media di u definita da

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)| \, dy.$$

Si ha $|\bar{u}_\varepsilon| \leq 1$, ma \bar{u}_ε in generale non assume valori in S^1 . Consideriamo allora la funzione

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\bar{u}_\varepsilon(x)}{|\bar{u}_\varepsilon(x)|}. \quad (1.60)$$

Osserviamo che se u è continua allora $u_\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente, quindi $|\bar{u}_\varepsilon| \rightarrow 1$ e la funzione u_ε è ben definita, prende valori in S^1 e converge uniformemente a u da cui la tesi. Tuttavia le funzioni di $H^1(U; S^1)$ non sono necessariamente continue, per cui la (1.60) potrebbe non avere senso perché a priori la \bar{u}_ε potrebbe annullarsi. Tuttavia questo non accade. Anche in questo caso abbiamo infatti che

$$|\bar{u}_\varepsilon| \rightarrow 1 \quad \text{uniformemente in } U. \quad (1.61)$$

Dalla disuguaglianza di Poincaré si ha infatti

$$\int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \bar{u}_\varepsilon(x)| \, dy \leq C |B_\varepsilon(x)|^{\frac{1}{2}} \int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \quad (1.62)$$

e quindi dalla disuguaglianza di Holder

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \bar{u}_\varepsilon(x)| \, dy \leq C \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.63)$$

D'altra parte

$$1 - |\bar{u}_\varepsilon(x)| = |u(y)| - |\bar{u}_\varepsilon(x)| \leq |u(y) - \bar{u}_\varepsilon(x)|$$

che integrata dà

$$1 - |\bar{u}_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \bar{u}_\varepsilon(x)| \, dy. \quad (1.64)$$

Se concanteniamo (1.64) con (1.63) otteniamo

$$1 - |\bar{u}_\varepsilon(x)| \leq C \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente per } \varepsilon \rightarrow 0$$

da cui la (1.61). A questo punto si dimostra che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in H^1 e si conclude. \square

Se nel Teorema 1.47 facciamo l'ipotesi aggiuntiva che U sia semplicemente connesso, la tesi è ottenibile come corollario del Teorema 1.42 di esistenza del lifting:

Dimostrazione del Teorema 1.47 se U semplicemente connesso. Se U è semplicemente connesso e $u \in H^1(U; S^1)$ per il Teorema 1.42 esiste un suo lifting $\varphi \in H^1(U; \mathbb{R})$. Per densità di $C^\infty(\bar{U}; \mathbb{R})$ in $H^1(U; \mathbb{R})$ esiste una successione

$\{\varphi_n\} \subset H^1(U; \mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in norma H^1 . Poniamo $u_n := e^{i\varphi_n}$ in modo che $u_n \in C^\infty(\bar{U}; S^1)$. Se proviamo che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \quad (1.65)$$

abbiamo concluso. Dalla stima

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

segue che

$$\int_U |u_n - u|^2 \leq \int_U |\varphi_n - \varphi| \rightarrow 0 \quad (1.66)$$

perché $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $L^2(U)$. Se ora deriviamo la relazione $u_n = e^{i\varphi_n}$ otteniamo

$$\nabla u_n = ie^{i\varphi_n} \nabla \varphi_n = i u_n \nabla \varphi_n$$

da cui

$$|\nabla u_n| = |\nabla \varphi_n|.$$

Questo implica che

$$\nabla u_n \text{ è limitato in } L^2(U), \quad (1.67)$$

visto che $\nabla \varphi_n \rightarrow \nabla \varphi$ in $L^2(U)$. Dal momento che abbiamo provato che $u_n \rightarrow u$ in $L^2(U)$, la (1.67) implica la (1.65) (si veda l'Osservazione 4 nel Capitolo 9 di [B2]). \square

1.8 Lifting in $H^{1/2}(\Gamma; S^1)$

Sia ora $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva diffeomorfa ad S^1 ed $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\partial A = \Gamma$.

Definizione 1.48. Sia $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$. Una funzione $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = e^{i\varphi(x)} \quad \text{per q.o. } x \in \Gamma.$$

si dice *lifting* di u su Γ .

Per le funzioni in $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ valgono risultati analoghi a quelli visti per funzioni continue nel Paragrafo 1.3. L'analogo del Teorema 1.22 è il seguente

Teorema 1.49. *Se $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ sono equivalenti:*

1. esiste $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R})$ *lifting* di u su Γ ;
2. $\deg(u; \Gamma) = 0$.

Cenno di dimostrazione. Come nel Teorema 1.22 un verso della dimostrazione è banale. Se infatti u ha *lifting* $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R})$ possiamo estendere φ a $\tilde{\varphi} \in H^1(A; \mathbb{R})$ e considerare la funzione $\tilde{u} = e^{i\tilde{\varphi}}$ che soddisfa $\tilde{u} \in H^1(\Omega; S^1)$ e $T(\tilde{u}) = u$ su $\partial A = \Gamma$. Dunque \tilde{u} è una estensione H^1 di u e per la formula (1.40) si ha

$$\deg(u; \Gamma) = \frac{1}{\pi} \int_A J(\tilde{u}).$$

Tuttavia $\tilde{u} \in H^1(A; S^1)$, per cui dalla Proposizione 1.45 segue che $J(\tilde{u}) = 0$ q.o. in A , da cui $\deg(u; \Gamma) = 0$.

Vogliamo dare una idea del viceversa. La dimostrazione completa può essere trovata in [BN1]. Se consideriamo la successione \bar{u}_ε introdotta in (1.38) e la sua proiezione su S^1

$$u_\varepsilon = \frac{\bar{u}_\varepsilon}{|\bar{u}_\varepsilon|}$$

abbiamo detto che si può dimostrare che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $H^{1/2}$. Per ε piccolo abbiamo poi che $\deg(u_\varepsilon; \Gamma) = \deg(u; \Gamma) = 0$. Ma le u_ε sono C^1 , quindi dal Teorema 1.22 esistono $\varphi_n \in C^1(\Gamma; \mathbb{R})$ tali che

$$u_n = e^{i\varphi_n} \quad \text{su } \Gamma.$$

La parte tecnica è provare che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ puntualmente e che $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R})$. \square

Anche il Teorema 1.21 si generalizza al caso $H^{1/2}$:

Teorema 1.50. *Sia $u \in H^{1/2}(\Gamma; S^1)$ e $p \in \Gamma$ un punto arbitrario. Consideriamo la curva semplicemente connessa $I = \Gamma \setminus \{p\}$. Allora esiste un lifting $\varphi \in H^{1/2}(I; \mathbb{R})$ di u .*

La dimostrazione è simile a quella del Teorema 1.21 (si veda [BBM]).

Esempio 1.51. Consideriamo l'esempio modello di $\Gamma = S^1$ ed $u(x) = x$. Essendo u regolare si ha $u \in H^{1/2}(S^1; S^1)$. Sappiamo che $\deg(u; S^1) = 1$, quindi dal Teorema 1.49 non esiste $\varphi \in H^{1/2}(S^1; \mathbb{R})$ lifting di u su Γ . Se rimuoviamo il punto $p = (1, 0)$ da S^1 , il Teorema 1.50 ci garantisce tuttavia che esiste un lifting $\theta \in H^{1/2}(S^1 \setminus \{p\}; \mathbb{R})$ di u su $S^1 \setminus \{p\}$. In effetti il lifting è sempre il solito $\theta(x) = \text{Arg}(x)$. Notiamo infatti che essendo θ regolare in $S^1 \setminus \{p\}$ si ha che $\theta \in H^{1/2}(S^1 \setminus \{p\}; \mathbb{R})$. Tuttavia $\theta \notin H^{1/2}(S^1; \mathbb{R})$. Infatti θ ha un salto di 2π in p , da cui

$$\int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|\theta(x) - \theta(y)|^2}{|x - y|^2} = +\infty.$$

■

1.9 Gli spazi $\mathbf{H}_g^1(\Omega; S^1)$ e $\mathbf{H}_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato semplicemente connesso con frontiera regolare. Assegnamo un dato al bordo $g \in H^{1/2}(\partial\Omega; S^1)$ e definiamo lo spazio funzionale delle estensioni in Ω a valori in S^1 del dato al bordo g :

$$H_g^1(\Omega; S^1) := \{u \in H^1(\Omega; S^1) : T(u) = g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

In analogia con il Teorema 1.25 vale:

Teorema 1.52. *Sono equivalenti:*

1. $\deg(g; \partial\Omega) = 0$;
2. $H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $u \in H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset$. Visto che u assume valori in S^1 , dalla Proposizione 1.45 segue che $J(u) = 0$ q.o. in Ω . Per la formula (1.40) si ha quindi

$$\deg(g; \partial\Omega) = \deg(u; \partial\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} J(u) = 0.$$

Viceversa supponiamo che $\deg(g; \partial\Omega) = 0$. Dal Teorema 1.49 esiste una $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R})$ lifting di u su $\partial\Omega$. Estendiamo φ a $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ e definiamo $\tilde{u} = e^{i\tilde{\varphi}}$. Si vede immediatamente che $\tilde{u} \in H_g^1(\Omega; S^1)$, che è quindi non vuoto. \square

Per le nostre applicazioni siamo interessati al caso di g tale che

$$\deg(g; \partial\Omega) \neq 0.$$

Vogliamo capire perché in questo caso

$$H_g^1(\Omega; S^1) = \emptyset \tag{1.68}$$

per aggirare il problema. Il problema per cui (1.68) accade è che ogni estensione $u: \Omega \rightarrow S^1$ di g tende a sviluppare delle singolarità che fanno esplodere l'energia all'interno di Ω . Come al solito, vediamo cosa succede nell'esempio modello.

Esempio 1.53. Siano $\Omega = B_1(0)$ e $g(x) = x$. Sappiamo che $\deg(g; S^1) = 1$, per cui $H_x^1(B_1(0); S^1)$ è vuoto per il Teorema 1.52. Consideriamo la naturale estensione di g a valori in S^1

$$u(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{per } x \neq 0.$$

Abbiamo che

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{|x|^2} \quad \text{per } x \neq 0.$$

Se indichiamo con (ρ, θ) le coordinate polari su \mathbb{R}^2 , e con $\Omega_\varepsilon := B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ abbiamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|^2} = \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \log \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.69}$$

Dunque l'energia di u si concentra in $B_\varepsilon(0)$ divergendo come $|\log \varepsilon|$. Per questo motivo $u \notin H^1(B_1(0); S^1)$. Notiamo tuttavia che la (1.69) dice anche che $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ e in particolare lo spazio $H_x^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ è non vuoto. \blacksquare

La situazione di questo esempio è vera in generale. Possiamo ottenere infatti un analogo della stima (1.69) sugli anelli ⁴:

Teorema 1.54. Siano $0 < R_1 < R_2$, $x \in \mathbb{R}^2$ e consideriamo l'anello

$$A = B_{R_2}(x) \setminus B_{R_1}(x)$$

(si veda la Figura 1.4). Se $u \in H^1(A; S^1)$ si ha

$$\int_A |\nabla u|^2 \geq 2\pi d^2 \log \frac{R_2}{R_1} \tag{1.70}$$

dove $d = \deg(u; \partial B_{R_2}(x))$.

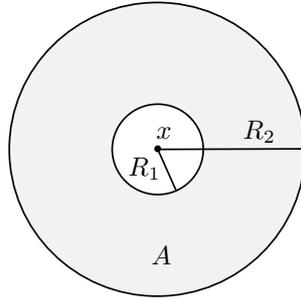


Figura 1.4: $A = B_{R_2}(x) \setminus B_{R_1}(x)$

Dimostrazione. Passo 1. Supponiamo prima che $u \in C^1(\bar{A}; S^1)$. Indichiamo con (ρ, θ) le coordinate polari centrate nell'anello A . Il gradiente di u in coordinate polari è

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

quindi

$$|\nabla u|^2 \geq \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2. \quad (1.71)$$

Integrando in coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A |\nabla u|^2 &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} |\nabla u(\rho, \theta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \\ &\geq \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 \, d\theta \right) \, d\rho \\ &\geq 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 \, d\theta \right) \, d\rho \end{aligned} \quad (1.72)$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Jensen nell'ultimo passaggio. Si noti adesso che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 \, d\theta \geq |d| \quad (1.73)$$

Infatti sia $\Gamma_r = \partial B_r(x)$ una qualsiasi circonferenza di centro x e raggio $r \in (R_1, R_2)$ che parametrizziamo in coordinate polari con $x(\rho, \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta)$. Per invarianza omotopica del grado abbiamo che

$$d = \deg(u; \partial B_{R_2}(x)) = \deg(u; \Gamma_r) \quad \text{per ogni } r \in (R_1, R_2).$$

Si ha che

$$2\pi d = \int_{\Gamma_r} u \times u_\tau = \int_0^{2\pi} u \times u_\tau \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |u \times u_\tau| \, d\theta. \quad (1.74)$$

⁴si veda il Teorema 1 su [Sa]

Osserviamo che la derivata tangenziale di u lungo Γ_r coincide con $\frac{\partial u}{\partial \theta}$. Inoltre, poiché u assume valori in S^1 e poiché u_τ è la derivata tangenziale rispetto a Γ_r , i vettori u ed u_τ sono ortogonali lungo Γ_r . Dunque

$$u \times u_\tau = |u_\tau| = \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| \quad \text{su } \Gamma_r$$

che insieme alla (1.74) dà la (1.73). Usando la (1.73) nella (1.72) otteniamo

$$\int_A |\nabla u|^2 \stackrel{(1.73)}{\geq} 2\pi d^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho = 2\pi d^2 \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Passo 2. Supponiamo ora che $u \in H^1(A; S^1)$. Per il Teorema 1.47 esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{A}; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in norma H^1 . Per il passo precedente si ha

$$\int_A |\nabla u_n|^2 \geq 2\pi d_n \log \frac{R_2}{R_1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (1.75)$$

dove $d_n = \deg(u_n; \partial B_{R_2}(x))$. Ma poiché $u_n \rightarrow u$ in H^1 segue che

$$\int_A |\nabla u_n|^2 \longrightarrow \int_A |\nabla u|^2 \quad (1.76)$$

e anche che $u_n \rightarrow u$ in $H^{1/2}(\partial B_{R_2}(x); S^1)$, quindi per il Teorema 1.34 di stabilità del grado si ha

$$d_n \rightarrow d. \quad (1.77)$$

Le (1.76) e (1.77) ci permettono di passare al limite in (1.75) e ottenere la tesi. \square

Osservazione 1.55. La (1.70) fornisce una dimostrazione alternativa del fatto che se

$$H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset$$

allora necessariamente

$$\deg(u; \partial\Omega) = 0.$$

Supponiamo infatti che $u \in H_g^1(\Omega; S^1)$. Sia $B_R(x) \subset \Omega$ e consideriamo l'anello $A = B_R(x) \setminus B_\varepsilon(x)$ con $0 < \varepsilon < R$, in modo che $A \subset \Omega$ (si veda la Figura 1.5). Per la (1.70) abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \int_A |\nabla u|^2 \stackrel{(1.70)}{\geq} 2\pi \deg(u; \partial B_R(x))^2 \log \frac{R}{\varepsilon}.$$

Essendo Ω semplicemente connesso segue che $\partial\Omega$ e $\partial B_R(x)$ sono omotopi, dunque per invarianza omotopica del grado si ha

$$\deg(g; \partial\Omega) = \deg(u; \partial\Omega) = \deg(u; \partial B_R(x))$$

da cui

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 2\pi \deg(g; \partial\Omega)^2 \log \frac{R}{\varepsilon}. \quad (1.78)$$

Se per assurdo si avesse $\deg(g; \partial\Omega) \neq 0$, essendo la (1.78) vera per ogni $\varepsilon \in (0, R)$, si avrebbe $\int_\Omega |\nabla u|^2 = +\infty$ contro l'ipotesi $u \in H^1(\Omega; S^1)$. Dunque $\deg(g; \partial\Omega) = 0$. \blacksquare

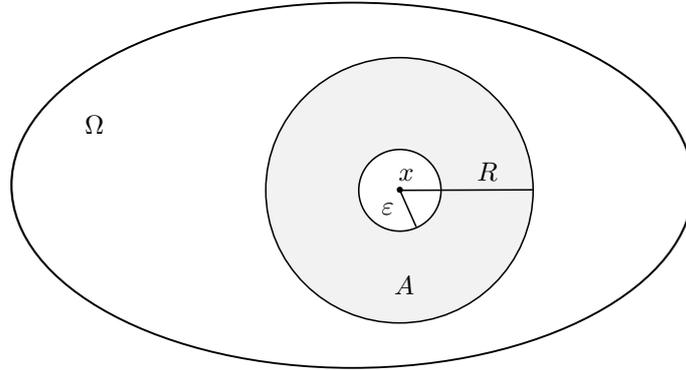


Figura 1.5: Anello A

L'osservazione suggerisce di rimuovere alcuni dischi da Ω nel caso in cui $\deg(g; \partial\Omega) \neq 0$. Fissiamo allora i punti $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ e un raggio $\varepsilon > 0$ tali che

1. $|x_i - x_j| > \varepsilon$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq N$
2. $\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, N$

In questo modo, posto $B_i = B_\varepsilon(x_i)$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B}_i$ si ha che Ω_ε è ancora un aperto connesso e che $\pi_1(\Omega_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^N$ (si veda la Figura 1.6).

Teorema 1.56. *Per ogni $g \in H^{1/2}(\partial\Omega; S^1)$ si ha $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1) \neq \emptyset$. In particolare, assegnati i gradi $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ tali che soddisfino alla condizione di compatibilità*

$$\sum_{i=1}^N d_i = \deg(g; \partial\Omega) \quad (1.79)$$

esiste almeno una funzione $u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ tale che

$$\deg(u; \partial B_i) = d_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la stessa del Teorema 1.28. Definiamo infatti la funzione

$$h(x) := \prod_{i=1}^N \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}$$

e notiamo che $h \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ e che

$$\deg(h; \partial\Omega) = \sum_{i=1}^N d_i.$$

Quindi

$$\deg(g \bar{h}; \partial\Omega) = \deg(g; \partial\Omega) - \deg(h; \partial\Omega) \stackrel{(1.79)}{=} 0$$

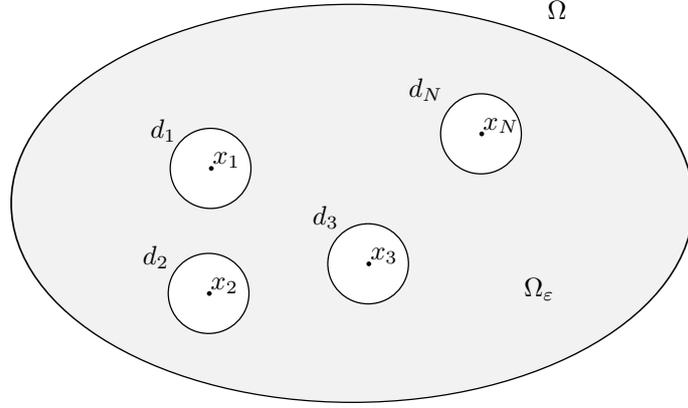


Figura 1.6: Dominio Ω_ε

e per il Teorema 1.49 esiste una $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$g\bar{h} = e^{i\varphi} \quad \text{q.o. su } \partial\Omega. \quad (1.80)$$

Sia $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ una estensione di φ e poniamo $u = h e^{i\tilde{\varphi}}$. In questo modo $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ e per la (1.80) si ha $u = g$ su $\partial\Omega$. Si osservi infine che

$$\deg(u; \partial B_i) = \deg(h; \partial B_i) + \deg(e^{i\tilde{\varphi}}; \partial B_i) = d_i$$

perché $\deg(e^{i\tilde{\varphi}}; \partial B_i) = 0$ essendo $e^{i\tilde{\varphi}} \in H^1(\Omega; S^1)$ con Ω semplicemente connesso (si veda l'Osservazione 1.55). \square

Se $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ possiamo definire il grado di u rispetto a $\partial\Omega_\varepsilon$ come

$$\deg(u; \partial\Omega_\varepsilon) := \deg(u; \partial\Omega) - \sum_{i=1}^N \deg(u; \partial B_i).$$

La condizione sui gradi (1.79) è necessaria affinché $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$:

Proposizione 1.57. *Se $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ allora $\deg(u; \partial\Omega_\varepsilon) = 0$.*

Dimostrazione. Se u è regolare la tesi segue dalla Proposizione 1.30. Se invece $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ per il Teorema 1.47 esiste una successione $\{u_n\}$ in $C^\infty(\bar{\Omega}; S^1)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in H^1 . Essendo le u_n regolari si ha

$$\deg(u_n; \partial\Omega) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (1.81)$$

Visto che $u_n \rightarrow u$ in H^1 allora $u_n \rightarrow u$ in $H^{1/2}(\partial\Omega; S^1)$ e per la stabilità del grado segue $\deg(u_n; \partial\Omega) \rightarrow \deg(u; \partial\Omega)$, che insieme alla (1.81) ci dà la tesi. \square

Concludiamo il paragrafo con un risultato di densità nello spazio $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$.

Teorema 1.58. *Sia $g \in C^\infty(\partial\Omega; S^1)$. Fissiamo una $u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ e indichiamo $d_i = \deg(u; \partial B_i)$. Allora esiste una successione $\{u_n\}$ in $C_g^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$ tale che*

1. $u_n \rightarrow u$ in $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$;

2. $\deg(u_n; \partial B_i) = d_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Passo 1. Supponiamo prima che $g \equiv 1$ e che $d_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Allora $u|_{\partial B_i} \in H^{1/2}(\partial B_i; S^1)$ con grado zero rispetto a ∂B_i . Dal Teorema 1.52 esiste quindi una estensione di u in $H^1_{u|_{\partial B_i}}(B_i; S^1)$. In questo modo abbiamo esteso u ad una funzione $\tilde{u} \in H^1_1(\Omega; S^1)$. Dal Teorema 1.42 esiste un suo lifting $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$. Poiché $\varphi|_{\partial\Omega}$ è lifting di 1, possiamo supporre che $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, cioè $\varphi \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R})$. Ricordiamo che $C_c^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ è denso in $H^1_0(\Omega; \mathbb{R})$ in norma H^1 (si veda [B1]). Dunque esiste una successione $\{\varphi_n\}$ in $C_c^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in H^1 . Posto $u_n = e^{i\varphi_n}$, questa successione soddisfa alla tesi. Infatti $\varphi_n = 0$ su $\partial\Omega$, dunque $u_n = 1$ su $\partial\Omega$. Inoltre $\deg(u_n; \partial B_i) = 0$ perché $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega}; S^1)$ con Ω semplicemente connesso. Infine, procedendo come nella dimostrazione alternativa del Teorema 1.47 si prova che $u_n \rightarrow u$ in H^1 .

Passo 2. Per il Teorema 1.29 esiste $w \in C_g^\infty(\Omega_\varepsilon; S^1)$ tale che $\deg(w; \partial B_i) = d_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Consideriamo la funzione $z := u\bar{w}$ in modo che $z \in H^1_1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ con $\deg(z; \partial B_i) = 0$. Dal Passo precedente esiste quindi una successione $z_n \in C^\infty_1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ tale che $\deg(z_n; \partial B_i) = 0$ e che $z_n \rightarrow z$ in norma H^1 . La successione $u_n := z_n w$ è tale che $u_n \in C_g^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$, $u_n \rightarrow u$ in H^1 e infine $\deg(u_n; \partial B_i) = d_i$. \square

1.10 Lifting in $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, semplicemente connesso con frontiera regolare e Ω_ε come nel precedente paragrafo.

Nel Paragrafo 1.7 abbiamo caratterizzato mediante il concetto di lifting le funzioni di $H^1(\Omega; S^1)$: il Teorema 1.42 ci dice che vale l'uguaglianza tra insiemi

$$H^1(\Omega; S^1) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})\}.$$

Siamo ora interessati al problema del lifting di funzioni in $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Consideriamo l'esempio modello:

Esempio 1.59. Sia $\Omega = B_1(0)$ ed $\Omega_\varepsilon = B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ in modo che la funzione

$$u(x) = \frac{x^k}{|x|^k}$$

sia in $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Un lifting di u è dato dalla funzione $\theta(x) = k \operatorname{Arg}(x)$, che ha un salto di $2k\pi$ sulla semiretta uscente dall'origine

$$R = \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}.$$

Se indichiamo con $L = \Omega_\varepsilon \cap R$ taglio in Ω_ε (si veda la Figura 1.7), il lifting è $\theta \in C^\infty(\Omega_\varepsilon \setminus L; \mathbb{R})$ e dunque in particolare $\theta \in H^1(\Omega_\varepsilon \setminus L; \mathbb{R})$. Si noti che il lifting θ non può essere in $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ perché ha un salto nell'attraversare il segmento $L \subset \Omega_\varepsilon$. Ricordiamo infatti che le funzioni H^1 sono assolutamente continue sui segmenti (si veda per esempio il Capitolo 4.9 di [EG]). \blacksquare

La situazione che si presenta nell'esempio è del tutto generale: i lifting di funzioni $H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$ presentano dei salti su tagli del dominio Ω_ε .

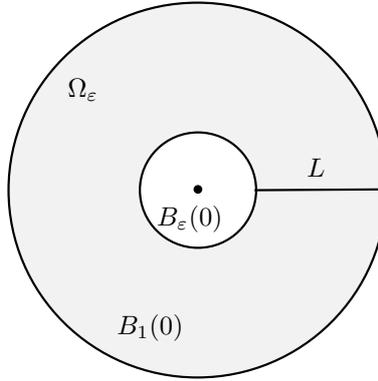


Figura 1.7: $\Omega_\varepsilon = B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$

Fissiamo le notazioni: il lifting della funzione

$$\frac{x - x_i}{|x - x_i|}$$

lo indichiamo con $\theta_{x_i}(x) = \text{Arg}(x - x_i)$ in modo che abbia un salto di 2π sulla semiretta

$$R_{x_i} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq \text{Re } x_i, \text{Im } z = \text{Im } x_i\} .$$

Introduciamo i tagli $L_{x_i} = \Omega_\varepsilon \cap R_{x_i}$ e il dominio privato dei tagli

$$\Omega_L = \Omega_\varepsilon \setminus \cup_{i=1}^N L_{x_i}$$

(si veda la Figura 1.8).

Teorema 1.60. *Sia $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1)$. Allora esiste $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R})$ tale che*

$$u = e^{i(\varphi + \Psi)} \quad \text{q.o. su } \Omega_\varepsilon \quad (1.82)$$

con

$$\Psi = \sum_{i=1}^N d_i \theta_{x_i}$$

dove $d_i = \deg(u; \partial B_i)$. In particolare u ammette lifting in $H^1(\Omega_L; \mathbb{R})$ che ha salto costante pari a $2\pi d_i$ su q.o. linea che attraversa il segmento L_{x_i} .

Se φ_1 e φ_2 sono due funzioni continue su Ω_ε che soddisfano la (1.82) allora differiscono (q.o. in Ω_ε) per un multiplo intero di 2π .

Dimostrazione. Sia

$$h(x) = \prod_{i=1}^N \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}$$

in modo che $h = e^{i\Psi}$. Osserviamo che $\deg(h; \partial B_i) = d_i$ per cui se introduciamo la funzione $w := u \bar{h}$ si ha

$$\deg(w; \partial B_i) = \deg(u; \partial B_i) - \deg(h; \partial B_i) = d_i - d_i = 0 .$$

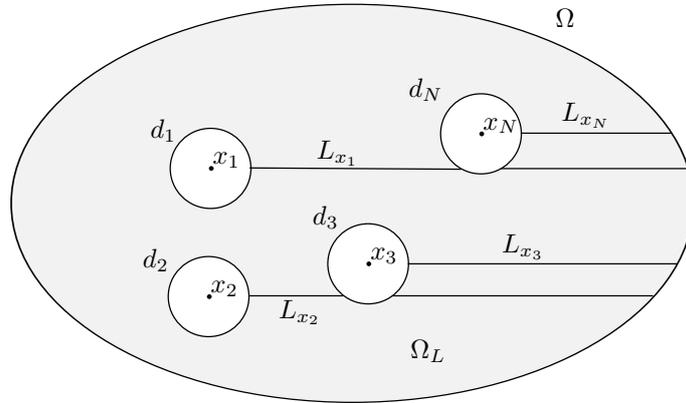


Figura 1.8: Ω_L

Dal Teorema 1.49 segue che

$$H_w^1(B_i; S^1) \neq \emptyset$$

e quindi possiamo estendere w ad una funzione $\tilde{w} \in H^1(\Omega; S^1)$. Per tale estensione, dal Teorema 1.42, esiste $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $\tilde{w} = e^{i\varphi}$ q.o. in Ω per cui

$$u \bar{h} = e^{i\varphi} \quad \text{q.o. su } \Omega_\varepsilon.$$

Moltiplicando quest'ultima per h otteniamo la (1.37). Dal momento che Ψ è $C^\infty(\Omega_L; \mathbb{R})$ segue che il lifting $\varphi + \Psi$ è in $H^1(\Omega_L; \mathbb{R})$.

La seconda parte della dimostrazione procede come nel Teorema 1.42 essendo Ω_ε connesso. \square

Capitolo 2

Metodi del calcolo delle variazioni

2.1 Metodo diretto

Ricordiamo il metodo diretto del calcolo delle variazioni (o teorema di Weierstrass).

Teorema 2.1. *Sia X uno spazio di Banach separabile e riflessivo ed $S \subset X$ un suo sottoinsieme chiuso e convesso. Supponiamo di avere un funzionale $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ che sia*

1. *(sequenzialmente) debolmente semicontinuo inferiormente, i.e. se $u_n \rightharpoonup u$ rispetto alla topologia debole di X allora*

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n);$$

2. *coercivo su S , cioè tale che*

$$\lim_{\substack{\|u\|_X \rightarrow +\infty \\ u \in S}} F(u) = +\infty.$$

Allora esiste $u_0 \in S$ tale che

$$F(u_0) = \min_{u \in S} F(u).$$

Se inoltre F è strettamente convesso su S , il minimo è unico.

Dimostrazione. Se $F \equiv +\infty$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora che $F \not\equiv +\infty$. Poniamo

$$m = \inf_{u \in S} F(u).$$

Poiché $F \not\equiv +\infty$ segue che $m < +\infty$. Sia allora $\{u_n\} \subset S$ una successione minimizzante, cioè tale che

$$F(u_n) \rightarrow m. \tag{2.1}$$

Visto che F è coercivo ed $m < +\infty$ segue che $\{u_n\}$ è limitata in norma X . Infatti, se non lo fosse esisterebbe una sottosuccessione u_{n_k} tale che $\|u_{n_k}\|_X \rightarrow$

$+\infty$, per cui $F(u_{n_k}) \rightarrow +\infty$, ma dalla (2.1) si avrebbe $m = +\infty$ che è assurdo. Quindi, essendo X uno spazio di Banach riflessivo e separabile, dal teorema di Alaoglu sequenziale (si veda l'appendice A.2) segue che esiste una estratta u_{n_k} ed una $u_0 \in X$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$. Per debole semicontinuità inferiore otteniamo

$$F(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \stackrel{(2.1)}{=} m$$

cioè u_0 realizza l'estremo inferiore m . Se proviamo che $u_0 \in S$ abbiamo concluso. Tuttavia S è (sequenzialmente) chiuso e convesso per ipotesi, dunque dal Teorema A.6 segue che è debolmente anche (sequenzialmente) chiuso. Quindi $u_0 \in S$ essendo $\{u_n\} \subset S$. \square

Diamo una applicazione elementare del metodo diretto, che ci sarà utile anche nel seguito.

Esempio 2.2 (Equazione di Laplace). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera regolare. Consideriamo lo spazio $X = H^1(\Omega)$ con la usuale topologia debole. Assegnamo un dato al bordo $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ e consideriamo

$$H_g^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : T(u) = g \text{ su } \partial\Omega\} .$$

Sappiamo che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo e separabile. Inoltre $H_g^1(\Omega)$ è convesso e chiuso perché l'operatore traccia $T: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ è lineare e continuo.

Sia $F: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale energia

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

e consideriamo il problema di minimo

$$m = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : u \in H_g^1(\Omega) \right\} . \quad (2.2)$$

Notiamo che $0 \leq m < +\infty$. Si ha che F è debolmente semicontinuo inferiormente su $H^1(\Omega)$. Supponiamo infatti che $u_n \rightharpoonup u$. Si ha

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u$$

da cui

$$2 \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 . \quad (2.3)$$

Visto che $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$, si ha che

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

quindi passando al limite inferiore in (2.3) si ottiene la debole semicontinuità inferiore di F .

Consideriamo ora una successione minimizzante $\{u_n\}$ in $H_g^1(\Omega)$ tale che

$$F(u_n) \rightarrow m \quad \text{se } n \rightarrow \infty .$$

Essendo m finito, si ha che

$$\sup_n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} < +\infty. \quad (2.4)$$

Sia $v \in H_g^1(\Omega)$ una arbitraria funzione (fissata). In tal modo la differenza

$$u_n - v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Su $H_0^1(\Omega)$ vale la disuguaglianza di Poincaré (si veda l'Appendice A.4) da cui

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n - v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u_n - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

che per la (2.4) ci dà

$$\sup_n \|u_n\|_{L^2(\Omega)} < +\infty. \quad (2.5)$$

La (2.4) e la (2.5) implicano che $\{u_n\}$ è uniformemente limitata in $H^1(\Omega)$, quindi esiste una estratta $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Notiamo che $u \in H_g^1(\Omega)$ essendo $H_g^1(\Omega)$ debolmente chiuso. Per la debole semicontinuità inferiore di F si conclude che

$$F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}) = m$$

ovvero u realizza il minimo in (2.2). ■

2.2 Γ -convergenza

In questa Tesi, come anche in molte altre applicazioni, è data una famiglia di problemi di minimo dipendente da un parametro $\varepsilon > 0$

$$\min \{F_\varepsilon(u) : u \in X\}$$

dove X è uno spazio topologico. Siamo interessati a trovare un problema limite

$$\min \{F(u) : u \in X\}$$

in modo che i possibili punti di minimo u_ε di F_ε siano correlati ai punti di minimo del funzionale limite F . Si vuole quindi definire una convergenza che sia stabile dal punto di vista variazionale, nel senso che se u_ε sono punti di minimo di F_ε tali che $u_\varepsilon \rightarrow u$ allora si vuole avere che

1. u è punto di minimo di F ;
2. $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F(u)$.

La definizione adatta è quella di Γ -convergenza introdotta da E. De Giorgi nel 1979 in [DF].

Procediamo alla definizione formale. Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sia data una famiglia $F_\varepsilon : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ di funzionali dipendenti dal parametro reale $\varepsilon > 0$.

Definizione 2.3. Sia $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un funzionale. Si dice che F è il Γ -limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ della famiglia F_ε nel punto $\bar{u} \in X$ se per ogni $\varepsilon_n \searrow 0$ valgono:

1. (Disuguaglianza di $\Gamma - \lim \inf$) per ogni successione $\{u_n\} \subseteq X$ tale che $u_n \rightarrow \bar{u}$ si ha

$$F(\bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n) \quad (2.6)$$

2. (Disuguaglianza di $\Gamma - \lim \sup$) esiste una successione ottimale (detta *recovery sequence*) $\{u_n\} \subseteq X$ tale che $u_n \rightarrow \bar{u}$ e

$$F(\bar{u}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_n}(u_n). \quad (2.7)$$

Diciamo che

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F \quad \text{in } A \subseteq X$$

se F è il Γ -limite di F_ε in ogni punto $\bar{u} \in A$.

Osserviamo che se vale la disuguaglianza di $\Gamma - \lim \inf$ per ogni successione allora la disuguaglianza di $\Gamma - \lim \sup$ equivale alla condizione:

3. (Disuguaglianza di $\Gamma - \lim \sup$) esiste una *recovery sequence* $\{u_n\} \subseteq X$ tale che $u_n \rightarrow \bar{u}$ e

$$F(\bar{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n).$$

Veniamo al Teorema per il quale abbiamo introdotto la Γ -convergenza.

Teorema 2.4 (Γ -convergenza). *Sia $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funzionale tale che $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ in tutto X . Siano $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\{u_n\} \subseteq X$ una successione tale che u_n è punto di minimo di F_{ε_n} per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $F_{\varepsilon_n}(u_n) = m_{\varepsilon_n}$ con*

$$m_\varepsilon = \inf \{F_\varepsilon(u) : u \in X\}.$$

Se $u_n \rightarrow \bar{u}$ in X allora

1. (convergenza dei punti di minimo) \bar{u} è punto di minimo di F su X , ovvero $F(\bar{u}) = m$ con

$$m = \inf \{F(u) : u \in X\};$$

2. (convergenza dei minimi) $F_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow F(\bar{u})$ ovvero $m_{\varepsilon_n} \rightarrow m$.

Dimostrazione. Mostriamo che \bar{u} è un punto di minimo di F . Poiché $u_n \rightarrow \bar{u}$, per la disuguaglianza di $\Gamma - \lim \inf$ si ha

$$F(\bar{u}) \stackrel{(2.6)}{\leq} \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq \limsup_n F_{\varepsilon_n}(u_n). \quad (2.8)$$

Sia $v \in X$ arbitrario. Dobbiamo vedere che $F(\bar{u}) \leq F(v)$. Sia $v_n \rightarrow v$ una *recovery sequence* per v . Essendo u_n punto di minimo di F_{ε_n} si ha $F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq F_{\varepsilon_n}(v_n)$ e quindi

$$\limsup_n F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq \limsup_n F_{\varepsilon_n}(v_n) \stackrel{(2.7)}{=} F(v)$$

e concatenando con la (2.8) otteniamo $F(\bar{u}) \leq F(v)$.

Facendo lo stesso ragionamento con $v = \bar{u}$ si ottiene

$$F(\bar{u}) \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq \limsup_n F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq F(\bar{u})$$

cioè $F_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow F(\bar{u})$. □

Esempio 2.5. Sia $X = \mathbb{R}$ e definiamo la successione (di funzionali) $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F_n(x) = x^2 + \sin(nx)$. Una stima banale ci fornisce

$$F_n(x) \geq x^2 - 1, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo quindi ipotizzare che $F(x) = x^2 - 1$ sia il Γ -limite di F_n . In effetti abbiamo che $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$. Mostriamo che valgono le stime di Γ -lim inf e Γ -lim sup:

1. (Disuguaglianza di Γ - lim inf) Se $x_n \rightarrow x$ si ha $F(x_n) \leq F_n(x_n)$, ed essendo F continua, passando al lim inf segue la (2.6).
2. (Disuguaglianza di Γ - lim sup) Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato. Dobbiamo costruire una recovery sequence per x , ovvero una successione che abbia energia ottimale. Sia x_n il punto di minimo locale di F_n più vicino ad x . In tal modo abbiamo costruito una successione $x_n \rightarrow x$. Si ha che x_n è una recovery sequence. Infatti, essendo x_n punto di minimo di F_n , ad ogni n fissato si ha che $F'_n(x_n) = 0$ e $F''_n(x_n) \geq 0$. La prima ci dice che $\cos(nx_n) \rightarrow 0$. Ma allora la successione $\sin(nx_n)$ converge ad 1 oppure a -1 . Ma $F''_n(x_n) \geq 0$ implica che $\lim_n \sin(nx_n) \leq 0$, per cui $\sin(nx_n) \rightarrow -1$ da cui si conclude che $F_n(x_n) \rightarrow F(x)$.

Osserviamo che se $x = 0$, la successione di punti di minimo costruita per provare la disuguaglianza di Γ - lim sup è tale che

1. (convergenza dei punti di minimo) x_n è punto di minimo di F_n , $x = 0$ è punto di minimo di F e si ha $x_n \rightarrow 0$.
2. (convergenza dei minimi) anche i minimi convergono poiché $F_n(x_n) \rightarrow F(0) = -1$.

cioè abbiamo la tesi del Teorema 2.4. ■

Introduciamo ora una condizione di compattezza sui funzionali F_ε che ci garantisca che una successione di minimizzanti $\{u_\varepsilon\}$ abbia almeno un punto di accumulazione.

Ricordiamo che il funzionale $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ si dice *sequenzialmente coercivo* se per ogni livello di energia $C \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{u \in X : F(u) \leq C\}$ è sequenzialmente precompatto in X .

Definizione 2.6 (Equicoercività sequenziale). La famiglia $\{F_\varepsilon\}$ si dice *sequenzialmente equicoerciva* se per ogni $\varepsilon_n \searrow 0$ e ogni livello di energia $C \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{u \in X : F_{\varepsilon_n}(u) \leq C\}$$

è sequenzialmente precompatto. Equivalentemente se la condizione

$$F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

implica che esiste $u \in X$ e una sottosuccessione u_{n_k} tale che $u_{n_k} \rightarrow u$ in X .

Teorema 2.7. Sia $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funzionale non degenero ($F \not\equiv +\infty$) tale che $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ in tutto X . Siano $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\{u_n\} \subseteq X$ una successione di punti di minimo di F_{ε_n} , ovvero tale che $F_{\varepsilon_n}(u_n) = m_{\varepsilon_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste una estratta u_{n_k} tale che

1. $u_{n_k} \rightarrow \bar{u}$ con \bar{u} punto di minimo di F su X ;
2. $F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}) \rightarrow F(\bar{u})$.

Dimostrazione. Poiché F è non degenere, esiste un $\hat{u} \in X$ tale che $F(\hat{u}) \neq +\infty$. Dal momento che $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ esiste una recovery sequence $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ tale che $F_{\varepsilon_n}(\hat{u}_n) \rightarrow F(\hat{u}) := C$. Dunque vale definitivamente la stima $F_{\varepsilon_n}(\hat{u}_n) \leq 1 + C$. Sia u_n una successione di punti di minimo di F_{ε_n} . Essendo punti di minimo si ha $F_{\varepsilon_n}(u_n) \leq F_{\varepsilon_n}(\hat{u}_n) \leq 1 + C$ definitivamente. Per la sequenziale equicoercività degli F_ε esiste allora una sottosuccessione u_{n_k} e un punto $\bar{u} \in X$ tale che $u_{n_k} \rightarrow \bar{u}$. Essendo u_{n_k} punti di minimo di $F_{\varepsilon_{n_k}}$ tali che $u_{n_k} \rightarrow \bar{u}$, dal Teorema 2.4 segue che \bar{u} è punto di minimo di F e che $F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}) \rightarrow F(\bar{u})$. \square

Il Teorema appena dimostrato ci dice che se i funzionali F_ε sono equicoercivi e Γ -convergono ad F su tutto X allora esistono punti di accumulazione dei punti di minimo di F_ε , cioè si ha $\mathcal{M} \neq \emptyset$ dove

$$\mathcal{M} := \{\text{punti limite di successioni } \{u_\varepsilon\} \text{ con } F_\varepsilon(u_\varepsilon) = m_\varepsilon\}.$$

Inoltre

$$\mathcal{M} \subseteq \{\text{punti di minimo di } F \text{ in } X\} \quad (2.9)$$

e

$$m_\varepsilon \rightarrow m.$$

Nelle applicazioni siamo interessati al comportamento asintotico dei punti di minimo della famiglia F_ε , ovvero vogliamo caratterizzare l'insieme \mathcal{M} . In generale può accadere che l'insieme dei punti di minimo di F sia troppo grande, o che addirittura coincida con l'intero spazio X . In tal caso la (2.9) non ci dà alcuna informazione. Vediamo un banale esempio:

Esempio 2.8. Sia $X = [-1, 1]$ ed $F_\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $F_\varepsilon(x) = \varepsilon|x|$. L'unico punto di minimo di F_ε è $x = 0$, dunque abbiamo che $\mathcal{M} = \{0\}$.

Gli F_ε sono equicoercivi, visto che X è compatto. Inoltre $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F \equiv 0$ su tutto $[-1, 1]$. Infatti la disuguaglianza di Γ -lim inf è immediata, visto che $F_\varepsilon \geq 0$, mentre se $x \in [0, 1]$ fissato, la successione costante $x_\varepsilon = x$ è una recovery sequence.

Dal Teorema 2.7 segue quindi che

$$\mathcal{M} \subset \{\text{punti di minimo di } F \text{ su } [-1, 1]\} = [-1, 1]$$

ovvero l'informazione banale.

Per questo motivo G. Anzellotti ed S. Baldo hanno introdotto nell'articolo [AB] una nozione di sviluppo per Γ -convergenza, che permette, in alcuni casi, di caratterizzare completamente l'insieme \mathcal{M} .

Capitolo 3

Funzioni armoniche a valori in S^1

3.1 Problema con dato al bordo

Nel seguito $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sarà un aperto limitato, semplicemente connesso e con frontiera regolare. Assegnamo un dato al bordo $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ che sia $C^\infty(\partial\Omega; S^1)$ nel senso detto in Appendice A.1.2 e poniamo $d = \deg(g; \partial\Omega)$. Consideriamo il problema di minimo

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : u \in H_g^1(\Omega; S^1) \right\}. \quad (3.1)$$

Una funzione u_0 minimo di (3.1) si dice *funzione armonica a valori in S^1* . Il Teorema 1.52 ci dice che

$$H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset \quad \text{se e solo se} \quad d = 0.$$

Dunque nel caso $d \neq 0$ il problema è mal posto: sarà necessario introdurre un problema regolarizzato. Prima di procedere è opportuno studiare il caso $d = 0$ per avere qualche idea per procedere nell'altro caso.

3.2 Il caso $d = 0$

Se $d = 0$ allora $H_g^1(\Omega; S^1) \neq \emptyset$ e il problema (3.1) è ben posto, nel senso che esiste sempre l'estremo inferiore. Vogliamo provare che effettivamente è un minimo. Se $u \in H_g^1(\Omega; S^1)$, dal Teorema 1.42 esiste un lifting $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$u = e^{i\varphi} \quad \text{q.o. in } \Omega$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2,$$

che suggerisce di studiare il problema per il lifting invece di (3.1). Vediamo quale problema risolve il lifting di u , assumendo che u raggiunga il minimo in

(3.1). Poiché $e^{i\varphi} = g$ su $\partial\Omega$ segue che $\varphi|_{\partial\Omega}$ è un lifting di g , dunque il lifting di u risolve

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 : \theta \in H^1(\Omega; \mathbb{R}), e^{i\theta} = g \text{ su } \partial\Omega \right\}.$$

Questa osservazione ci permette di provare:

Teorema 3.1. *Esiste un'unica soluzione u_0 di (3.1). Inoltre $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}; S^1)$ e si scrive*

$$u_0 = e^{i\varphi_0} \quad \text{in } \bar{\Omega}$$

con $\varphi_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ armonica su Ω .

Dimostrazione. Passo 1. Dal Teorema 1.22 esiste $\theta_g \in C^\infty(\partial\Omega; S^1)$ lifting di g . Sia φ_0 la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = \theta_g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ovvero φ_0 risolve il problema di minimo

$$\min_{\varphi \in H_{\theta_g}^1(\Omega; \mathbb{R})} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2. \quad (3.2)$$

Passo 2. $u_0 = e^{i\varphi_0}$ è $C^\infty(\bar{\Omega}; S^1)$ ed è tale che $u_0|_{\partial\Omega} = g$. Inoltre

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 \leq C \|\theta_g\|_{H^{1/2}}$$

per stime ellittiche e dunque $u_0 \in H_g^1(\Omega; S^1)$.

Passo 3. u_0 è soluzione di (3.1). Sia infatti $v \in H_g^1(\Omega; S^1)$ e $\Psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ un suo lifting. In particolare Ψ sarà un lifting di g su $\partial\Omega$ e quindi

$$\Psi = \theta_g + 2k\pi \quad \text{su } \partial\Omega$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$, come conseguenza del Teorema 1.22. Dunque

$$\Psi - 2k\pi \in H_{\theta_g}^1(\Omega; \mathbb{R})$$

e poiché la φ_0 risolve (3.2) segue

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\Psi - 2k\pi)|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2$$

e quindi u_0 è minimo.

Passo 4. Esaminiamo l'unicità. Si osservi che lo spazio $H_g^1(\Omega; S^1)$ non è convesso, per cui non possiamo concludere l'unicità del minimo sfruttando la stretta convessità del funzionale energia. Tuttavia possiamo sfruttare che il problema (3.2) ammette unica soluzione. Supponiamo che $v \in H_g^1(\Omega; S^1)$ sia un'altra soluzione di (3.1), i.e.

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2.$$

A meno di traslazioni, possiamo scegliere un lifting Ψ di v tale che $\Psi \in H_{\theta_g}^1(\Omega; S^1)$. Quindi

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2$$

e dunque $\Psi = \varphi_0$ e $v = u_0$. □

Si prova facilmente (si veda [BBH2]) che le equazioni di Eulero-Lagrange del problema (3.1) sono

$$\begin{cases} -\Delta u = u |\nabla u|^2 & \text{in } \Omega, \\ |u| = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 Il caso $d \neq 0$

Passiamo adesso a studiare il caso $d \neq 0$, in cui $H_g^1(\Omega; S^1) = \emptyset$ e il problema di minimo (3.1) è mal posto. Abbiamo visto sull'esempio di $g = x$ che questo accade perché un suo qualunque prolungamento a valori in S^1 tende a sviluppare singolarità dell'energia non integrabili. L'ostruzione topologica è data dalla semplice connessione di Ω . Un possibile metodo di regolarizzazione del problema è quello di rimuovere dei dischi da Ω in modo da ottenere un dominio non semplicemente connesso. Tale approccio prende il nome di *core radius approach* (CRA).

Siano allora $N \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ fissati. Scegliamo $\varepsilon > 0$ che verifichi

1. $|x_i - x_j| > 4\varepsilon$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq N$
2. $\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, N$

in modo tale che, posto $B_i = B_\varepsilon(x_i)$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B}_i$ si abbiano

1. Ω_ε aperto connesso;
2. $\pi_1(\Omega_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^N$, ovvero Ω_ε ha esattamente N buchi.

Idealmente, vorremmo sostituire a (3.1) il problema di minimo

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 : u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) \right\} \quad (3.4)$$

che ora è ben posto, visto che $H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1) \neq \emptyset$ per ogni dato al bordo g (Teorema 1.56). Il problema con la (3.4) è che mancano le condizioni al contorno sulle ∂B_i . A tal fine fissiamo $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ tali che valga la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^N d_i = d \quad (3.5)$$

e definiamo la classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g = \left\{ u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Notiamo che $\mathcal{U}_\varepsilon^g \neq \emptyset$ per la condizione di compatibilità sui gradi (sempre Teorema 1.56) ed è quindi ben posto il problema di minimo

$$E = \inf_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2. \quad (3.6)$$

Notiamo che la funzione $u \mapsto \deg(u; \partial B_i)$ non è continua per la topologia debole di $H^{1/2}(\partial B_i)$: un controesempio è dato dalla successione $u_n: S^1 \rightarrow S^1$

$$u_n(\theta) = \begin{cases} e^{i\theta} & \text{se } \theta \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right] \\ e^{i(1-2\pi n)(\theta-2\pi)} & \text{se } \theta \in \left[2\pi - \frac{1}{n}, 2\pi\right] \end{cases}$$

dove θ è la variabile angolare su S^1 . Infatti abbiamo che $\deg(u_n; S^1) = 0$ ma $u_n \rightharpoonup e^{i\theta}$ in $H^{1/2}(S^1; S^1)$ e $\deg(e^{i\theta}; S^1) = 1$.

Quindi il vincolo $\deg(u; \partial B_i) = d_i$ non è debolmente chiuso (per la topologia debole di $H^{1/2}$) da cui segue che l'insieme $\mathcal{U}_\varepsilon^g$ non è debolmente chiuso (si noti che $\mathcal{U}_\varepsilon^g$ è chiuso ma non convesso, perché la condizione di avere valori in S^1 non è convessa, dunque non si contraddice il Teorema A.6). Dunque non possiamo usare il metodo diretto del calcolo delle variazioni (cfr. Teorema 2.1) per provare che il minimo in (3.6) è raggiunto.

Nel Capitolo 1 di [BBH1] viene provato che il valore di E in (3.6) è in relazione con la soluzione (classica) ϕ_ε del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = g \times g_\tau & \text{su } \partial\Omega \\ \phi = C_i = \text{cost.} & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.7)$$

dove ν normale esterna di Ω e di B_i . Le costanti C_i non sono date ma sono un'incognita del problema: si richiede che ϕ sia costante sul bordo delle B_i . Vale il seguente Teorema:

Teorema 3.2. *Il problema (3.7) ammette un'unica soluzione $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; \mathbb{R})$ tale che*

$$\int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon = 0.$$

Tutte le altre soluzioni di (3.7) sono della forma $\phi_\varepsilon + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Inoltre ϕ_ε minimizza il funzionale

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \phi|_{\partial B_i} - \int_{\partial\Omega} \phi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial\tau} \right)$$

sull'insieme

$$V = \{ \phi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : \phi|_{\partial B_i} = C_i = \text{costante}, i = 1, \dots, N \}.$$

Per il momento tralasciamo la dimostrazione di questo Teorema, che verrà ripresa nel Paragrafo 3.5. Il valore di E è legato a ϕ_ε nel seguente modo:

Teorema 3.3. *Il problema di minimo (3.6) ammette un'unica soluzione u_ε . Inoltre $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$ e*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \quad (3.8)$$

con ϕ_ε soluzione classica di (3.7).

Vediamo come dimostrare il Teorema. Vogliamo prima capire da dove viene il problema (3.7). Come nella dimostrazione del Teorema 3.1 l'idea è quella di considerare un lifting di $u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g$ e vedere che problema risolve. In questo caso però, essendo il grado al bordo diverso da zero, il lifting non è una funzione

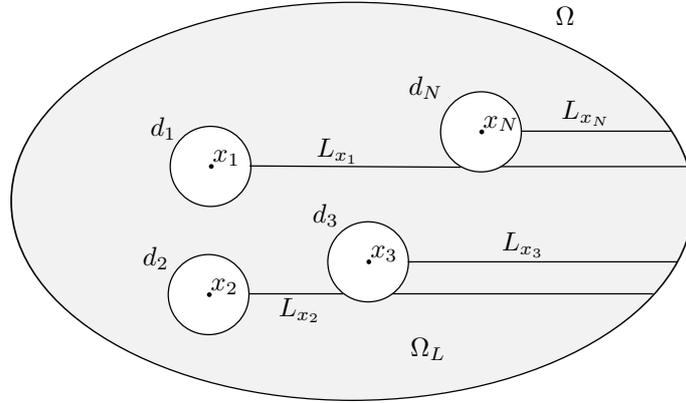


Figura 3.1: Ω_L

$H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R})$ ma presenta dei salti costanti su dei tagli del dominio Ω_ε . Infatti, con le notazioni del Paragrafo 1.10, per il Teorema 1.60 esiste θ in $H^1(\Omega_L; \mathbb{R})$ che ha salto costante pari a $2\pi d_i$ sul taglio L_{x_i} (si veda la Figura 3.1) ed è tale che

$$u = e^{i\theta} \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon. \quad (3.9)$$

Ricordiamo che la (3.9) implica che

$$|\nabla u|^2 = |\nabla \theta|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon$$

per cui si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \theta|^2.$$

Quindi, se u_ε è soluzione del problema di minimo (3.6) ne segue che il suo lifting θ_ε risolve il problema di minimo

$$\min_{\theta \in H^1(\Omega_L; \mathbb{R})} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 : e^{i\theta} = g \text{ su } \partial\Omega, [\theta]_{L_{x_i}} = 2\pi d_i, i = 1, \dots, N \right\} \quad (3.10)$$

dove con $[\theta]_{L_{x_i}}$ indichiamo il salto di θ su L_{x_i} . La condizione $[\theta]_{L_{x_i}} = 2\pi d_i$ può essere tradotta in una più maneggevole condizione integrale. Se infatti Γ è una qualsiasi curva diffeomorfa ad S^1 che gira intorno ad x_i ed è contenuta in Ω_ε , dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = [\theta]_{L_{x_i}} = 2\pi d_i.$$

con τ vettore tangente a Γ . Dunque se consideriamo $\Gamma = \partial B_i$ otteniamo la condizione equivalente

$$[\theta]_{L_{x_i}} = 2\pi d_i \quad \text{se e solo se} \quad \int_{\partial B_i} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2\pi d_i.$$

Introduciamo lo spazio

$$T_g = \left\{ \theta \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : e^{i\theta} = g \text{ su } \partial\Omega, \int_{\partial B_i} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2\pi d_i, i = 1, \dots, N \right\}$$

e quello delle funzioni test

$$T_0 = \{ \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : \varphi = 0 \text{ su } \partial\Omega \} .$$

Supponiamo ora che θ_ε sia soluzione regolare di (3.10). Fissata $\varphi \in T_0$ consideriamo la funzione di variabile reale

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\theta_\varepsilon + t\nabla\varphi|^2 .$$

Dal momento che $\theta_\varepsilon + t\varphi \in T_g$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ segue che e ha un minimo in $t = 0$. Quindi $e'(0) = 0$ e otteniamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (3.11)$$

che vale per ogni $\varphi \in T_0$. Se prendiamo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_L; \mathbb{R})$ in (3.11) e integriamo per parti otteniamo

$$\Delta\theta_\varepsilon = 0 \quad \text{su} \quad \Omega_L .$$

Analogamente, se $\varphi \in C^\infty(\Omega_L; \mathbb{R})$ tale che $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$ e $\varphi = 0$ su ∂B_j per $j \neq i$, integrando per parti si trova

$$\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 \quad \text{su} \quad \partial B_i .$$

Dunque θ_ε risolve il problema lineare

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\theta_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_L \\ e^{i\theta_\varepsilon} = g & \text{su } \partial\Omega \\ \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\tau} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N . \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Questo problema non è facile da trattare. Si ricorre allora ad un trucco standard: si introduce la coniugata armonica di θ_ε .

Ricordiamo che se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto semplicemente connesso ed

$$u: A \rightarrow \mathbb{R}^2$$

è una funzione armonica, la coniugata armonica di u è l'unica funzione armonica

$$w: A \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che $u + iw$ è una funzione olomorfa su A , cioè tale che valgano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} , \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} . \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Come conseguenza del Lemma di Poincaré, la coniugata armonica di u esiste se e soltanto se il dominio A è semplicemente connesso.

Dal momento che le componenti connesse di Ω_L sono semplicemente connesse, localmente esiste la coniugata armonica di θ_ε , che indichiamo con ϕ_ε . Vediamo che ϕ_ε risolve il problema (3.7). Infatti, se deriviamo lungo $\partial\Omega$ la condizione

$$e^{i\theta_\varepsilon} = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega$$

si ottiene

$$\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\tau} = g \times g_\tau \quad \text{su} \quad \partial\Omega$$

per cui θ_ε risolve

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \nabla\theta_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\tau} = g \times g_\tau & \text{su } \partial\Omega \\ \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\tau} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Tenendo conto delle equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo quindi che ϕ_ε risolve (3.7).

Prima di dimostrare il Teorema 3.3 formuliamo il Lemma di Poincaré per 1-forme a coefficienti regolari in termini di campi vettoriali, e vediamo una sua generalizzazione.

Lemma 3.4. *Siano $D_1, D_2 \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e consideriamo il campo vettoriale*

$$D = (D_1, D_2).$$

Sono equivalenti:

1. $\operatorname{div} D = 0$;
2. esiste un potenziale $H \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right).$$

Lemma 3.5. *Siano $D_1, D_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R})$ e consideriamo il campo vettoriale*

$$D = (D_1, D_2).$$

Supponiamo che $\operatorname{div} D = 0$ e che

$$\int_{\partial B_i} D \cdot \nu = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

Allora esiste un potenziale $H \in C^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R})$ tale che

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right).$$

Dimostrazione. Consideriamo il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta\omega_i = 0 & \text{in } B_i, \\ \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu} = D \cdot \nu & \text{su } \partial B_i. \end{cases}$$

Una soluzione di tale problema esiste perché vale la condizione di compatibilità (3.14) (si veda l'Appendice A.5). Definiamo il campo vettoriale

$$\tilde{D} = \begin{cases} D & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \nabla\omega_i & \text{su } \partial B_i. \end{cases}$$

Notiamo che $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$ su Ω che è semplicemente connesso, quindi dal Lemma precedente si ha la tesi. \square

Dimostrazione del Teorema 3.3. Passo 1. Proviamo che

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi_\varepsilon|^2 \quad (3.15)$$

per ogni $u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g$. Dal Teorema (1.58) sappiamo che le funzioni regolari sono dense in $\mathcal{U}_\varepsilon^g$, quindi basta provare la (3.15) per funzioni regolari. Sia quindi $u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g \cap C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon; S^1)$ e consideriamo il campo vettoriale

$$D = \left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_1}, u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_2} \right).$$

Poiché u assume valori in S^1 , dalla Proposizione 1.16 abbiamo $J(u) = 0$ in Ω_ε . Quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = -2J(u) = 0$$

e allora

$$\operatorname{div} D = -2J(u) + \Delta\phi_\varepsilon = 0 \quad \text{su } \Omega_\varepsilon \quad (3.16)$$

essendo ϕ_ε armonica in Ω_ε . Inoltre

$$\int_{\partial B_i} D \cdot \nu = 0. \quad (3.17)$$

Infatti, essendo il versore normale $\nu = (\tau_2, -\tau_1)$ con $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ versore tangente, si ha

$$D \cdot \nu = -u \times u_\tau + \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu}.$$

Quindi (3.17) segue dal fatto che

$$\int_{\partial B_i} u \times u_\tau = 2\pi \operatorname{deg}(u; \partial B_i) = 2\pi d_i$$

e

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} = 2\pi d_i.$$

Visto che valgono (3.16) e (3.17) siamo nelle ipotesi del Lemma 3.5: esiste una funzione $H \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ tale che

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \quad \text{su } \Omega_\varepsilon$$

ovvero

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_2}, \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Da queste ultime e dal fatto che $|u| = 1$ segue che

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \\ &= |\nabla H|^2 + |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Inoltre dal Teorema della divergenza e dal fatto che $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_1} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \left(H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_2}, -H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_1} \right) \\ &= \int_{\partial \Omega_\varepsilon} H \left(\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_2} \nu_1 - \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_1} \nu_2 \right) = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} \\ &= \int_{\partial \Omega} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che

$$\int_{\partial B_i} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad (3.21)$$

$$\int_{\partial \Omega} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} = 0. \quad (3.22)$$

La (3.21) vale perché ϕ_ε è costante su ∂B_i e quindi

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \quad \text{su } \partial B_i.$$

La (3.22) vale perché

$$\int_{\partial \Omega} H \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \tau} = - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial H}{\partial \tau} \phi_\varepsilon = 0.$$

Infatti dalle (3.18)

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -u \times u_\tau + \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial \Omega$$

perché

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} = g \times g_\tau \quad \text{su } \partial \Omega$$

e dal momento che $u = g$ su $\partial\Omega$ si ha anche

$$u \times u_\tau = g \times g_\tau \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

Dalle (3.19) e (3.20) concludiamo la (3.15)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla H|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2.$$

Passo 2. Esibiamo una funzione $u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g$ tale che

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2.$$

Poiché le componenti connesse di Ω_L sono semplicemente connesse, esiste la coniugata armonica θ_ε di ϕ_ε . Per quanto detto prima della dimostrazione, θ_ε risolve le equazioni (3.12). Dunque $u_\varepsilon := e^{i\theta_\varepsilon}$ è una funzione in $\mathcal{U}_\varepsilon^g$. Per le equazioni di Cauchy-Riemann (3.13) abbiamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \theta_\varepsilon|^2 \stackrel{(3.13)}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2$$

da cui la tesi. □

3.4 Analisi asintotica

Siamo ora interessati al comportamento della soluzione u_ε per $\varepsilon \searrow 0$. In particolare vorremmo ottenere una stima sull'energia della u_ε . Visto che dal Teorema 3.3 vale

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2$$

è sufficiente studiare il comportamento di ϕ_ε per $\varepsilon \searrow 0$. Se vogliamo estendere ϕ_ε ad una funzione regolare in tutto Ω dobbiamo estenderla all'interno delle palline B_i . In tal caso il Teorema della divergenza ci dice che

$$\int_{B_i} \Delta \phi_\varepsilon = \int_{\partial B_i} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} = 2\pi d_i.$$

Questo conto formale suggerisce che al limite la ϕ_ε sia vicina alla soluzione del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi_0 = 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

Una soluzione di (3.23) è intesa come una funzione u regolare su $\bar{\Omega} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ tale che soddisfi la prima equazione nel senso delle distribuzioni, cioè

$$\int_{\Omega} \phi_0 \Delta \varphi = 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \varphi(x_i) \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ricordiamo che la ϕ_ε è scelta in modo che

$$\int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon = 0$$

quindi coerentemente richiediamo che ϕ_0 sia tale che

$$\int_{\partial\Omega} \phi_0 = 0. \quad (3.24)$$

In effetti proveremo che:

Teorema 3.6. ϕ_ε converge uniformemente a ϕ_0 per $\varepsilon \searrow 0$. Più precisamente, esiste una costante $C \geq 0$ tale che

$$\|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon$$

per ogni ε sufficientemente piccolo fissato.

Prima di procedere alla dimostrazione, mostriamo che il problema (3.23) ammette soluzione:

Lemma 3.7. Esiste una soluzione ϕ_0 di (3.23) che soddisfa la (3.24). Inoltre ϕ_0 è armonica in $\Omega_0 := \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ e dunque è $C^\infty(\bar{\Omega}_0)$.

Dimostrazione. Ricordiamo che la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in \mathbb{R}^2 è data da $u(x) = \log|x - x_i|$ che è tale che $\Delta u = 2\pi\delta_{x_i}$ nel senso di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ed è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}$. Definiamo

$$\eta(x) := \sum_{i=1}^N d_i \log|x - x_i|$$

in modo che $\Delta\eta = 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$ e che è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$. Cerchiamo ϕ_0 soluzione di (3.23) della forma $\phi_0 = R_0 + \eta$. Affinché tale ϕ_0 risolva (3.23) la R_0 deve essere tale che

$$\begin{cases} \Delta R_0 = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial R_0}{\partial \nu} = g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial \nu} & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

che è un usuale problema di Neumann. Dal Teorema A.16 in Appendice A.5 sappiamo che (3.25) ammette soluzione se e solo se è soddisfatta la condizione di compatibilità

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial R_0}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \Delta R_0. \quad (3.26)$$

Sostituendo otteniamo che la (3.26) equivale a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} = 2\pi \deg(g; \partial\Omega) = 2\pi d \quad (3.27)$$

per definizione di grado.

Quindi provando la (3.27) concludiamo la dimostrazione e la funzione che soddisfa contemporaneamente le (3.23) e (3.24) è data da $\phi_0 - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \phi_0$.

Poiché la η armonica in Ω_0 abbiamo che

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\eta = 0$$

per cui

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\eta}{\partial\nu} - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} \frac{\partial\eta}{\partial\nu}.$$

Da quest'ultima segue che

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^N d_i \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x - x_j| = 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \quad (3.28)$$

perché vale la relazione nota con il nome di Lemma di Gauss (si veda per esempio [Fo, Proposition 3.19, Chapter 3])

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x - x_j| = 2\pi\delta_{ij}. \quad (3.29)$$

Infatti, se $i \neq j$ dal Teorema della divergenza abbiamo

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x - x_j| = \int_{B_i} \Delta \log|x - x_j| = 0$$

essendo $\log|x - x_j|$ armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_j\}$ e quindi in B_i ; se invece $i = j$ la normale esterna a B_i è $\nu(x) = \frac{x - x_i}{|x - x_i|}$ quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial\nu} \log|x - x_i| &= \int_{\partial B_i} \nabla \log|x - x_i| \cdot \nu(x) \\ &= \int_{\partial B_i} \frac{x - x_i}{|x - x_i|^2} \cdot \frac{x - x_i}{|x - x_i|} = 2\pi. \end{aligned}$$

Ricordando che vale l'ipotesi di compatibilità sui gradi

$$\sum_{i=1}^N d_i = d$$

sostituendola in (3.28) otteniamo la conduzione di compatibilità (3.26).

Abbiamo quindi trovato la soluzione di (3.23) della forma $\phi_0 = R_0 + \eta$ con R_0 armonica in Ω ed η armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ da cui segue che ϕ_0 è armonica in Ω_0 . \square

Osservazione 3.8. Come conseguenza della dimostrazione abbiamo che ϕ_0 gode della proprietà

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi_0}{\partial\nu} = 2\pi d_i. \quad (3.30)$$

Infatti poiché R_0 armonica in Ω abbiamo

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial R_0}{\partial\nu} = \int_{B_i} \Delta R_0 = 0 \quad (3.31)$$

mentre dalla (3.29) si ha

$$\int_{\partial B_i} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 2\pi d_i \quad (3.32)$$

e quindi essendo $\phi_0 = R_0 + \eta$, dalle (3.31) e (3.32) segue la (3.30). \blacksquare

Passiamo alla dimostrazione del Teorema 3.6. Denotiamo con $v_\varepsilon = \phi_\varepsilon - \phi_0$ definita in Ω_ε . Essendo ϕ_ε armonica in Ω_ε e ϕ_0 armonica in Ω_0 segue che v_ε è armonica in Ω_ε . Inoltre abbiamo $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$ e $\int_{\partial B_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ per la (3.30). Dunque v_ε risolve il problema lineare

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \int_{B_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.33)$$

Per questo problema vale il seguente principio del massimo:

Lemma 3.9. *Se v soddisfa le equazioni (3.33) allora vale il principio del massimo*

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} v - \inf_{\Omega_\varepsilon} v \leq \sum_{i=1}^N \left(\sup_{\partial B_i} v - \inf_{\partial B_i} v \right). \quad (3.34)$$

La dimostrazione del Lemma è abbastanza lunga e tecnica, quindi la posticipiamo nel Paragrafo 3.6 e passiamo direttamente alla dimostrazione del Teorema 3.6.

Dimostrazione del Teorema 3.6. Applichiamo il Lemma 3.9 alla $v_\varepsilon = \phi_\varepsilon - \phi_0$:

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon - \inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq \sum_{i=1}^N \left(\sup_{\partial B_i} v_\varepsilon - \inf_{\partial B_i} v_\varepsilon \right). \quad (3.35)$$

Essendo ϕ_ε costante sul bordo delle B_i segue che

$$\sup_{\partial B_i} v_\varepsilon - \inf_{\partial B_i} v_\varepsilon = \sup_{\partial B_i} (-\phi_0) - \inf_{\partial B_i} (-\phi_0) = \sup_{\partial B_i} \phi_0 - \inf_{\partial B_i} \phi_0$$

e concatenando con la (3.35) otteniamo

$$\sup_{\partial B_i} v_\varepsilon - \inf_{\partial B_i} v_\varepsilon \leq \sum_{i=1}^N \left(\sup_{\partial B_i} \phi_0 - \inf_{\partial B_i} \phi_0 \right). \quad (3.36)$$

Ma ϕ_0 è armonica in Ω_0 , quindi dal Teorema di Lagrange abbiamo che

$$|\phi_0(x) - \phi_0(y)| \leq \sup_{\partial B_i} |\phi_0'| |x - y| \leq 2 \sup_{\partial B_i} |\phi_0'| \varepsilon, \quad \text{per ogni } x, y \in \partial B_i$$

da cui

$$\sup_{\partial B_i} \phi_0 - \inf_{\partial B_i} \phi_0 \leq K\varepsilon.$$

Utilizzando quest'ultima stima in (3.36) otteniamo che

$$\sup_{\partial B_i} v_\varepsilon - \inf_{\partial B_i} v_\varepsilon \leq C\varepsilon. \quad (3.37)$$

Per come abbiamo scelto ϕ_ε e ϕ_0 abbiamo che

$$\int_{\partial\Omega} v_\varepsilon = \int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} \phi_0 = 0$$

quindi esiste un $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $v_\varepsilon(x_0) = 0$. Questo implica che

$$\inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq 0$$

per cui

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} = \sup_{\Omega_\varepsilon} |v_\varepsilon| \leq \max \left\{ \sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon, -\inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \right\} \leq \sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon - \inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \stackrel{(3.37)}{\leq} C\varepsilon$$

che è la tesi. \square

Possiamo infine dare lo sviluppo asintotico dell'energia di u_ε :

Teorema 3.10 (Stima asintotica dell'energia). *Sia ϕ_0 la soluzione di (3.23) e definiamo $R_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come*

$$R_0(x) = \phi_0(x) - \sum_{i=1}^N d_i \log |x - x_i|.$$

in modo che sia armonica in Ω . Se u_ε è soluzione di (3.6) e ϕ_ε è soluzione di (3.7), si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \pi \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right) |\log \varepsilon| + W(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + o(\varepsilon) \quad (3.38)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)$ e W è definita da

$$W = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log |x_i - x_j| - \pi \sum_{i=1}^N d_i R_0(x_i) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right). \quad (3.39)$$

Il termine

$$\pi \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right) |\log \varepsilon|$$

si dice *self energy*, mentre W prende il nome di *energia rinormalizzata*: è quel che rimane dell'energia togliendo la parte che esplosa, ovvero la self energy. Si noti che W dipende solo dalla posizione dei punti x_i , dai gradi d_i e dal dato al bordo g . Inoltre è una quantità finita per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Dal Teorema 3.3, integrando per parti e usando il Teorema della divergenza si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \phi_\varepsilon \cdot \nabla \phi_\varepsilon \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \phi_\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} \phi_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_\varepsilon|_{\partial B_i} 2\pi d_i \end{aligned}$$

ricordando che ϕ_ε risolve (3.7). Dal momento che

$$\|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

segue che

$$\phi_\varepsilon \rightarrow \phi_0 \quad \text{uniformemente su } \partial\Omega$$

e

$$\phi_\varepsilon|_{\partial B_i} \rightarrow \phi_0|_{\partial B_i},$$

per cui

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_0|_{\partial B_i} 2\pi d_i + o(\varepsilon). \quad (3.40)$$

Ora, $\phi_0 = R_0 + \sum_{i=1}^N d_i \log|x - x_i|$ quindi

$$\phi_0(x) = R_0(x_i) + \sum_{j=1}^N d_j \log|x - x_j| + o(\varepsilon) \quad \text{uniformemente su } \partial B_i$$

e sostituendo in (3.40) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^N d_i R_0(x_i) \\ &\quad - \pi \sum_{i,j=1}^N d_i d_j (\log|x - x_j|)|_{\partial B_i} + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Osserviamo che per $i \neq j$

$$(\log|x - x_j|)|_{\partial B_i} = \log|x_i - x_j| + o(\varepsilon) \quad (3.42)$$

mentre per $i = j$

$$(\log|x - x_i|)|_{\partial B_i} = \log \varepsilon \quad (3.43)$$

essendo $B_i = B_\varepsilon(x_i)$. Sostituendo le (3.42) e (3.43) in (3.41) segue la tesi. \square

3.5 Esistenza e unicità per il problema ausiliario

Consideriamo di nuovo il problema lineare (3.7) che per comodità del lettore ricordiamo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = g \times g_\tau & \text{su } \partial\Omega \\ \phi = C_i = \text{cost.} & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Si ricordi inoltre che ν è la normale esterna a Ω e a B_i , che le costanti C_i sono parte del problema, che $g \times g_\tau$ è un dato al bordo regolare e che i gradi d_i sono assegnati in modo che valga la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^N d_i = d = \deg(g; \partial\Omega). \quad (3.45)$$

Teorema 3.11. *Il problema (3.44) ammette un'unica soluzione $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon}; \mathbb{R})$ tale che*

$$\int_{\partial\Omega} \phi_\varepsilon = 0.$$

Tutte le altre soluzioni di (3.44) sono della forma $\phi_\varepsilon + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Inoltre ϕ_ε minimizza il funzionale

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \phi|_{\partial B_i} - \int_{\partial\Omega} \phi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)$$

sull'insieme

$$V = \left\{ \phi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : \phi|_{\partial B_i} = C_i = \text{costante}, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Per dimostrare il Teorema procediamo al solito modo (si veda [B2]):

1. si definisce una formulazione debole per (3.44);
2. si prova che le soluzioni classiche sono soluzioni deboli e che le soluzioni deboli regolari sono anche soluzioni classiche;
3. si prova che esistono soluzioni deboli;
4. si dimostra che le soluzioni deboli sono regolari.

Definiamo le soluzioni deboli di (3.44):

Definizione 3.12. Diciamo che $\phi_\varepsilon \in V$ è soluzione debole di (3.44) se vale

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\phi_\varepsilon \cdot \nabla f + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i f|_{\partial B_i} - \int_{\partial\Omega} f \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (3.46)$$

per ogni $f \in V$.

Questa è la giusta formulazione debole per le (3.44) perché vale la seguente Proposizione.

Proposizione 3.13. *Se ϕ_ε è soluzione classica di (3.44) allora è anche soluzione debole. Viceversa, se $\phi_\varepsilon \in V$ è soluzione debole ed è regolare, è anche soluzione classica.*

Dimostrazione. Supponiamo che ϕ_ε sia soluzione classica di (3.44). Se $f \in V$ abbiamo che $\Delta\phi_\varepsilon f = 0$ q.o. in Ω e integrando

$$\int_{\Omega} \Delta\phi_\varepsilon f = 0. \quad (3.47)$$

Integrando per parti la (3.47) e applicando il Teorema della divergenza si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\phi_\varepsilon \cdot \nabla f - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0. \quad (3.48)$$

Se indichiamo con ν la normale esterna ad Ω e alle B_i si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} &= \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} \\ &= \int_{\partial\Omega} f \left(g \times \frac{\partial g}{\partial\tau} \right) - 2\pi \sum_{i=1}^N d_i f|_{\partial B_i} \end{aligned}$$

essendo $\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} = g \times g_\tau$ su $\partial\Omega$ ed essendo $f|_{\partial B_i}$ costante e $\int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} = 2\pi d_i$. Sostituendo nella (3.48) otteniamo la tesi.

Viceversa, supponiamo che $\phi_\varepsilon \in V \cap C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ sia soluzione debole. Considerando funzioni test $f \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$ nella (3.46) otteniamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\phi_\varepsilon \cdot \nabla f = 0 \quad \text{per ogni } f \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

che integrata per parti fornisce

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\phi_\varepsilon f = 0 \quad \text{per ogni } f \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

da cui $\Delta\phi_\varepsilon = 0$ puntualmente in Ω_ε . Sia ora $f \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon) \cap V$; integrando per parti il primo addendo della (3.46) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\phi_\varepsilon \cdot \nabla f &= - \int_{\Omega} \Delta\phi_\varepsilon f + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} \\ &= \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - \sum_{i=1}^N f|_{\partial B_i} \int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} \end{aligned}$$

perché $\Delta\phi_\varepsilon = 0$. Sostituendo in (3.46) si ha

$$\int_{\partial\Omega} f \left(\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - g \times \frac{\partial g}{\partial\tau} \right) - \sum_{i=1}^N f|_{\partial B_i} \left(\int_{\partial B_i} \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - 2\pi d_i \right) = 0$$

per ogni $f \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon) \cap V$. Scegliendo tali f in modo che siano nulle su ∂B_i si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} f \left(\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - g \times \frac{\partial g}{\partial\tau} \right) = 0 \quad \text{per ogni } f \in C^\infty(\partial\Omega)$$

che forza

$$\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} = g \times \frac{\partial g}{\partial\tau} \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Se invece tali f sono nulle su $\partial\Omega$ e su ogni ∂B_j con $j \neq i_0$ si ottiene

$$f|_{\partial B_{i_0}} \left(\int_{\partial B_{i_0}} \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial\nu} - 2\pi d_{i_0} \right) = 0 \quad \text{per ogni } f|_{\partial B_{i_0}} \in \mathbb{R}$$

da cui la tesi. □

Definiamo adesso il funzionale $F: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \varphi|_{\partial B_i} - \int_{\partial \Omega} \varphi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right).$$

e mostriamo che le soluzioni deboli di (3.44) sono punti di minimo di F su V . A tali fine osserviamo che $F = D + G$ con

$$D(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 \quad \text{e} \quad G := F - D.$$

G è un funzionale lineare e continuo su V per la topologia di H^1 perché

$$\begin{aligned} G(\varphi) &= 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \varphi|_{\partial B_i} - \int_{\partial \Omega} \varphi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} \frac{d_i}{\varepsilon} \varphi|_{\partial B_i} - \int_{\partial \Omega} \varphi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \varphi \Theta \end{aligned}$$

dove Θ è una funzione $C^\infty(\partial \Omega_\varepsilon)$ definita da

$$\Theta = \begin{cases} -g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} & \text{su } \partial \Omega, \\ -\frac{d_i}{\varepsilon} & \text{su } \partial B_i. \end{cases}$$

Dalle disuguaglianze di Hölder e di traccia segue

$$|G(\varphi)| \leq \|\Theta\|_\infty |\partial \Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\partial \Omega_\varepsilon)} \leq \|\Theta\|_\infty |\partial \Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

cioè G è continuo. Notiamo anche che F è convesso, essendo D convesso e G lineare.

Proposizione 3.14. *Sia $\phi_\varepsilon \in V$. Sono equivalenti:*

1. ϕ_ε è soluzione debole di (3.44);
2. ϕ_ε è punto di minimo di F su V .

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata di Gateaux di F . Sia $f \in V$ in modo che $\phi_\varepsilon + tf \in V$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora è ben definita la funzione $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $e(t) = F(\phi_\varepsilon + tf)$. Allora

$$e(t) = D(\phi_\varepsilon) + t^2 D(f) + t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \phi_\varepsilon \cdot \nabla f + G(\phi_\varepsilon) + tG(f)$$

da cui

$$e'(0) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \phi_\varepsilon \cdot \nabla f + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i f|_{\partial B_i} - \int_{\partial \Omega} f \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right).$$

Supponiamo ora che ϕ_ε sia minimo di F su V . Allora e ha un minimo in $t = 0$ e quindi $e'(0) = 0$, che è esattamente la (3.46). Per arbitrarietà di $f \in V$ segue che ϕ_ε è soluzione debole.

Viceversa se ϕ_ε è soluzione debole di (3.44) allora fissata $f \in V$ si ha $e'(0) = 0$. Poiché F è un funzionale convesso su $H^1(\Omega_\varepsilon)$, segue che e è una funzione convessa e quindi $t = 0$ è minimo assoluto. In particolare $e(0) \leq e(1)$, cioè

$$F(\phi_\varepsilon) \leq F(\phi_\varepsilon + f) \quad \text{per ogni } f \in V. \quad (3.49)$$

Se ora $\varphi \in V$ e inseriamo $f = \varphi - \phi_\varepsilon$ nella (3.49) otteniamo la tesi. \square

Infine vogliamo provare che F ammette minimo su V usando il metodo diretto del calcolo delle variazioni (Teorema 2.1). Notiamo però che F è invariante per traslazioni, ovvero

$$F(\varphi) = F(\varphi + c) \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}, \varphi \in V$$

essendo $F = D + G$ e

$$G(c) = 2\pi c \left(\sum_{i=1}^N d_i - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) = 2\pi c \left(\sum_{i=1}^N d_i - d \right) = 0$$

per la condizione di compatibilità sui gradi (3.45). Dunque F non può essere coercivo su V perché possiamo considerare una successione $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tale che $\|\varphi + c_n\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow +\infty$ ma $F(\varphi + c_n) = F(\varphi)$. Per questo motivo introduciamo il sottospazio di V

$$V_0 := \left\{ f \in V : \int_{\partial\Omega} f = 0 \right\}$$

nel quale non è possibile fare traslazioni.

Teorema 3.15. *Esiste un'unica $\phi_\varepsilon \in V_0$ tale che*

$$F(\phi_\varepsilon) = \min_{\varphi \in V} F(\varphi).$$

Tutti gli altri punti di minimo di F su V sono della forma $\phi_\varepsilon + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Passo 1. V_0 è chiuso rispetto alla convergenza H^1 perché le condizioni $f|_{\partial B_i} = \text{cost.}$ e $\int_{\partial\Omega} f = 0$ passano al limite per la disuguaglianza di traccia. Essendo V_0 convesso (è un sottospazio vettoriale) ne segue che è anche debolmente chiuso.

Passo 2. F è (sequenzialmente) debolmente semicontinuo inferiormente su $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Supponiamo infatti che $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in H^1 . Essendo $G \in (H^1(\Omega_\varepsilon))^*$, per definizione di convergenza debole si ha $G(\varphi_n) \rightarrow G(\varphi)$. Si ha poi che $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in H^1 implica $\nabla \varphi_n \rightharpoonup \nabla \varphi$ in L^2 , e quindi per la debole semicontinuità inferiore della norma, segue che $D(\varphi) \leq \liminf_n D(\varphi_n)$ e quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(\varphi_n) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} (D(\varphi_n) + G(\varphi_n)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} D(\varphi_n) + G(\varphi) \geq D(\varphi) + G(\varphi) = F(\varphi). \end{aligned}$$

Passo 3. F è coercivo su V_0 . Infatti nel Corollario A.15 dell'Appendice A.4 dimostriamo che in V_0 vale la disuguaglianza di Poincaré, i.e. esiste una costante $K = K(\Omega_\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 \geq K \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi|^2 \quad \text{per ogni } \varphi \in V_0$$

da cui concludiamo che la norma del gradiente è equivalente alla norma H^1 su V_0 : esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{per ogni } \varphi \in V_0. \quad (3.50)$$

Ricordando che $G \in (H^1(\Omega_\varepsilon))^*$, per ogni $\varphi \in V_0$ vale

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{1}{2} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + G(\varphi) \stackrel{(3.50)}{\geq} \frac{C^2}{2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + G(\varphi) \\ &\geq \frac{C^2}{2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - \|G\| \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

che implica la coercività di F su V_0 .

Passo 4. I tre punti precedenti mostrano che siamo nelle ipotesi del Teorema 2.1: esiste $\phi_\varepsilon \in V_0$ tale che

$$F(\phi_\varepsilon) = \min_{\varphi \in V_0} F(\varphi). \quad (3.51)$$

Dobbiamo provare che ϕ_ε è minimo su V , cioè che

$$F(\phi_\varepsilon) \leq F(\varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in V. \quad (3.52)$$

Se $\varphi \in V$, indichiamo con $\varphi_{\partial\Omega} = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \varphi$ la sua media su $\partial\Omega$, in modo che $\varphi - \varphi_{\partial\Omega} \in V_0$. Poiché F è invariante per traslazioni,

$$F(\phi_\varepsilon) \stackrel{(3.51)}{\leq} F(\varphi - \varphi_{\partial\Omega}) = F(\varphi)$$

provando la (3.52).

Passo 5. Il minimo di F su V_0 è unico. Supponiamo infatti che $\phi_1, \phi_2 \in V_0$ siano due minimi di F , cioè che $F(\phi_1) = F(\phi_2) = m$ con

$$m = \min_{\varphi \in V_0} F(\varphi). \quad (3.53)$$

Per la convessità di F segue che

$$m \stackrel{(3.53)}{\leq} F\left(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(\phi_1) + \frac{1}{2}F(\phi_2) = m$$

dalla quale

$$F\left(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{2}\right) = \frac{1}{2}F(\phi_1) + \frac{1}{2}F(\phi_2). \quad (3.54)$$

Usando la linearità di G nella (3.54) otteniamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \left| \frac{\nabla\phi_1 + \nabla\phi_2}{2} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_1|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_2|^2 \right\} = 0. \quad (3.55)$$

Per la convessità della funzione $\xi \mapsto |\xi|^2$ si ha che l'integranda di (3.55) è

$$\left| \frac{\nabla\phi_1 + \nabla\phi_2}{2} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_1|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_2|^2 \leq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon$$

e vista la (3.55) segue che

$$\left| \frac{\nabla\phi_1 + \nabla\phi_2}{2} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_1|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi_2|^2 = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon. \quad (3.56)$$

Poiché la funzione $\xi \mapsto |\xi|^2$ è strettamente convessa, la (3.56) implica che

$$\nabla\phi_1 = \nabla\phi_2 \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon$$

e quindi $\phi_2 = \phi_1 + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Tuttavia $\phi_1, \phi_2 \in V_0$, quindi $\int_{\partial\Omega} \phi_1 = \int_{\partial\Omega} \phi_2 = 0$ dalla quale si conclude che $c = 0$ e $\phi_1 = \phi_2$ quasi ovunque in Ω_ε .

Passo 6. Proviamo infine che tutti i punti di minimo di F su V sono della forma $\phi_\varepsilon + c$. Chiaramente $\phi_\varepsilon + c$ è un altro minimo di F su V , essendo $F(\phi_\varepsilon + c) = F(\phi_\varepsilon)$. Viceversa, sia $\Psi \in V$ è un altro minimo di F su V . Allora $\Psi - \Psi_{\partial\Omega} \in V_0$ e per unicità del minimo su V_0 si ha $\Psi - \Psi_{\partial\Omega} = \phi_\varepsilon$, ovvero $\Psi = \phi_\varepsilon + c$ con la costante $c = \Psi_{\partial\Omega}$. \square

Con usuali stime ellittiche (si veda [BB]) si prova infine che le soluzioni deboli di (3.44) sono regolari concludendo così la dimostrazione del Teorema 3.11.

3.6 Stima ellittica

Occupiamoci della dimostrazione del Lemma 3.9 che per comodità del lettore ricordiamo:

Lemma 3.16. *Se v soddisfa le equazioni*

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ \int_{B_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{per ogni } i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.57)$$

allora vale il principio del massimo

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} v - \inf_{\Omega_\varepsilon} v \leq \sum_{i=1}^N \left(\sup_{\partial B_i} v - \inf_{\partial B_i} v \right). \quad (3.58)$$

Per dimostrare il Lemma è utile introdurre la formulazione debole per le (3.57). Sia v_ε una soluzione di (3.57) e definiamo i sottospazi chiusi di $H^1(\Omega_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} H &:= \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : u = C_i = \text{costante su } \partial B_i\} \\ H_{v_\varepsilon} &:= \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : u - v_\varepsilon = C_i = \text{costante su } \partial B_i\} \end{aligned}$$

dove le C_i non sono assegnate.

Definizione 3.17. Diciamo che $u \in H_{v_\varepsilon}$ è soluzione debole di (3.57) se

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (3.59)$$

per ogni $\varphi \in H$.

Proposizione 3.18. v_ε è soluzione debole di (3.57).

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che banalmente $v_\varepsilon \in H_{v_\varepsilon}$. Infatti v_ε è armonica in Ω_ε , quindi ha energia finita e $v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Inoltre la condizione sulle ∂B_i è verificata con $C_i = 0$.

Sia ora $\varphi \in H$. Quindi

$$\Delta v_\varepsilon \varphi = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega_\varepsilon$$

che integrata per parti dà

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta v_\varepsilon \varphi = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi. \quad (3.60)$$

Ma

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_i} \varphi \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad (3.61)$$

perché $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$, mentre

$$\int_{\partial B_i} \varphi \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = \varphi|_{\partial B_i} \int_{\partial B_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$$

essendo φ costante su ∂B_i e $\int_{\partial B_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$. Dalle (3.60) e (3.61) segue la tesi. \square

Introduciamo quindi il funzionale $F: H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2.$$

Come al solito abbiamo:

Proposizione 3.19. Se $u \in H_{v_\varepsilon}$ sono equivalenti:

1. u è soluzione debole di (3.57) ;
2. u è minimo di F su H_{v_ε} .

Dimostrazione. Sia u soluzione debole. Poiché $H_{v_\varepsilon} = v_\varepsilon + H$, per vedere che u minimizza F su H_{v_ε} basta provare che

$$F(u) \leq F(u + \varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in H.$$

Sia dunque $\varphi \in H$. Allora

$$F(u + \varphi) = F(u) + F(\varphi) + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi \stackrel{(3.59)}{=} F(u) + F(\varphi) \geq F(u)$$

essendo $F(\varphi) \geq 0$.

Viceversa, supponiamo che u sia minimo di F su H_{v_ε} e fissiamo $\varphi \in H$. Quindi la funzione $e(t) = F(u + t\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, ha un minimo in $t = 0$. Ma

$$e(t) = F(u) + t^2 F(\varphi) + t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

e quindi

$$e'(0) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi.$$

Essendo $e'(0) = 0$ segue la tesi. \square

Come conseguenza della Proposizione si ha che v_ε è minimo di F su H_{v_ε} . Vale infine il seguente principio di massimo debole:

Proposizione 3.20. *Due punti di minimo su H_{v_ε} del funzionale F differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Se u è punto di minimo di F su H_{v_ε} in particolare è soluzione debole di (3.57). Supponiamo che u_1 e u_2 siano punti di minimo di F su H_{v_ε} . In particolare $w := u_1 - u_2$ risolve

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in H.$$

Essendo $w \in H$, possiamo prenderla come funzione test nella formulazione debole e ottenere

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w|^2 = 0$$

da cui $w = c$ q.o. in Ω_ε per una opportuna $c \in \mathbb{R}$. □

Siamo pronti a dimostrare il Lemma 3.16.

Dimostrazione del Lemma 3.16. Passo 1. Siano

$$\alpha_i := \inf_{\partial B_i} v_\varepsilon, \quad \beta_i := \sup_{\partial B_i} v_\varepsilon, \quad m := \min_{1 \leq i \leq N} \alpha_i, \quad M := \max_{1 \leq i \leq N} \beta_i$$

e infine

$$I := \bigcup_{i=1}^N [\alpha_i, \beta_i].$$

Per definizione, abbiamo che $I \subseteq [m, M]$. Proviamo che I è un intervallo e quindi in particolare che $I = [m, M]$. Se per assurdo I non fosse un intervallo, esisterebbero $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $m < a < b < M$ e $I \cap [a, b] = \emptyset$. Sia

$$B := v_\varepsilon^{-1}(a, b) = \{x \in \Omega_\varepsilon : a < v_\varepsilon(x) < b\}.$$

B è aperto perché v_ε è continua. Inoltre $B \neq \emptyset$. Infatti, essendo v_ε continua e Ω_ε connesso segue che $v_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ è connesso, ovvero v_ε assume tutti i valori compresi tra $\inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon$ e $\sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon$. Dal momento che

$$\inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq m < a < b < M \leq \sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon$$

abbiamo che v_ε assume tutti i valori tra a e b , da cui $B \neq \emptyset$. Essendo B un aperto non vuoto, segue in particolare che la sua misura di Lebesgue è positiva:

$$|B| > 0. \tag{3.62}$$

Definiamo allora

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x) & \text{se } v(x) < a, \\ a & \text{se } a \leq v(x) \leq b, \\ v_\varepsilon(x) - (b - a) & \text{se } v(x) > b. \end{cases}$$

Per definizione abbiamo che

$$\nabla \tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B \\ \nabla v_\varepsilon(x) & \text{se } x \in \Omega_\varepsilon \setminus B \end{cases}$$

quindi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B} |\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 + \int_B |\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B} |\nabla v_\varepsilon|^2 \stackrel{(3.62)}{<} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2$$

ovvero

$$F(\tilde{v}_\varepsilon) < F(v_\varepsilon). \quad (3.63)$$

Se proviamo che

$$\tilde{v}_\varepsilon \in H_{v_\varepsilon} \quad (3.64)$$

otteniamo l'assurdo, perché le (3.63) e (3.64) contraddicono il fatto che v_ε è punto di minimo di F su H_{v_ε} . Per definizione la \tilde{v}_ε è misurabile e la sua norma L^2 è finita perché Ω_ε è limitato e $v_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Inoltre dalla (3.63) segue che $\nabla \tilde{v}_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, dunque $\tilde{v}_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Fin qui non abbiamo usato l'ipotesi assurda che I non fosse un intervallo. Resta da provare che $\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon$ è costante su ∂B_i . Poiché $I \cap [a, b] = \emptyset$, abbiamo che $\beta_i < a$ oppure $b < \alpha_i$. Nel primo caso per definizione di \tilde{v}_ε abbiamo $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$ su ∂B_i ; nel secondo caso abbiamo $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon + (b - a)$ su ∂B_i . In entrambi i casi $\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon$ è costante su ∂B_i provando la (3.64).

Passo 2. Avendo provato che $I = [m, M]$ ne segue in particolare che

$$M - m \leq \sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i). \quad (3.65)$$

Se dimostriamo che

$$m \leq v_\varepsilon(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in \Omega_\varepsilon \quad (3.66)$$

e quindi che

$$m \leq \inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon, \quad \sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq M$$

per la (3.65) otteniamo

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon - \inf_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq M - m \leq \sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i)$$

che è la tesi del Lemma. Introduciamo la funzione troncata $\tilde{v}_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} m & \text{se } v_\varepsilon(x) \leq m, \\ v_\varepsilon(x) & \text{se } m < v_\varepsilon(x) < M, \\ M & \text{se } v_\varepsilon(x) \geq M. \end{cases}$$

Sia

$$A := v_\varepsilon^{-1}(m, M) = \{x \in \Omega_\varepsilon : m < v_\varepsilon(x) < M\}.$$

Essendo v_ε continua l'insieme A è aperto quindi dal fatto che $\nabla \tilde{v}_\varepsilon = \chi_A \nabla v_\varepsilon$ si ha

$$F(\tilde{v}_\varepsilon) \leq F(v_\varepsilon). \quad (3.67)$$

Questo implica che $\tilde{v}_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Notiamo anche che $\tilde{v}_\varepsilon \in H_{v_\varepsilon}$ perché per definizione su ∂B_i abbiamo $m \leq v_\varepsilon \leq M$ da cui $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$ su ∂B_i . Dalla (3.67), dal fatto che v_ε è il minimo di F su H_{v_ε} e dalla Proposizione 3.20 segue che $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon + c$ in Ω_ε per qualche $c \in \mathbb{R}$. Ma sulle ∂B_i si ha $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$ da cui $c = 0$ e $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$ in tutto Ω_ε . Da questo segue la (3.66). \square

3.7 Problema senza dato al bordo

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto semplicemente connesso, limitato e con frontiera regolare. Siano $N \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_N \in \Omega$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ che verifichi

1. $|x_i - x_j| > 4\varepsilon$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq N$
2. $\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, N$

e definiamo $B_i = B_\varepsilon(x_i)$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B}_i$. Siano dati i gradi $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{Z}$ e definiamo la classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon; S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N\}.$$

Notiamo che $\mathcal{U}_\varepsilon \neq \emptyset$ perché per esempio contiene la funzione

$$\prod_{i=1}^N \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}}$$

dove il prodotto è quello in \mathbb{C} . Consideriamo il problema di minimo

$$G = \inf_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2. \quad (3.68)$$

Osserviamo nuovamente che la funzione $u \mapsto \deg(u; \partial B_i)$ non è continua per la topologia debole di $H^{1/2}(\partial B_i)$, quindi il vincolo \mathcal{U}_ε non è chiuso per la topologia debole di $H^{1/2}(\partial B_i)$ e il metodo diretto del calcolo delle variazioni fallisce.

Il valore di G è legato alla soluzione classica del seguente problema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \phi = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ \phi = C_i = \text{cost.} & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.69)$$

dove ν normale esterna di Ω e di B_i e le costanti C_i non sono fissate ma sono un'incognita del problema.

Teorema 3.21. *Il problema (3.69) ammette un'unica soluzione $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon; \mathbb{R})$. Inoltre ϕ_ε minimizza il funzionale*

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \phi|_{\partial B_i}$$

sull'insieme

$$W = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}) : \phi = 0 \text{ su } \partial\Omega, \phi|_{\partial B_i} = C_i = \text{costante}, i = 1, \dots, N\}.$$

Questo teorema può essere dimostrato con tecniche analoghe a quelle usate per provare il Teorema 3.2. Il valore di G è legato a ϕ_ε nel seguente modo:

Teorema 3.22. *L'estremo inferiore in (3.68) è raggiunto da una funzione regolare che è unica a meno di una fase, i.e., se u_1 e u_2 sono due punti di minimo allora $u_1 = \alpha u_2$ per qualche $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$. Inoltre*

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \quad (3.70)$$

con ϕ_ε soluzione classica di (3.69).

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 3.3 e può essere trovata su [BBH1].

Capitolo 4

Analisi per Γ -convergenza

Come nel Capitolo 3 sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, semplicemente connesso e con frontiera regolare. Sia assegnato $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ un dato al bordo regolare e indichiamo con $d = \deg(g; \partial\Omega)$ il suo grado. Nel seguito assumeremo che $d \geq 0$ (non si perde di generalità, a meno di sostituire a g la sua armonica coniugata).

Fissiamo $\varepsilon > 0$ ed N punti x_1, \dots, x_N di Ω tali che

$$|x_i - x_j| > 4\varepsilon, \text{ dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon \quad \text{per ogni } 1 \leq i \neq j \leq N \quad (4.1)$$

e definiamo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$, dove $B_i := B_\varepsilon(x_i)$. In tal modo Ω_ε è connesso e $\pi_1(\Omega_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^d$ (si veda la Figura 4.1). Si scelgano anche N gradi d_1, \dots, d_N tali che $\sum_{i=1}^N d_i = d$. Consideriamo il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \quad (4.2)$$

dove

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g = \{u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon; S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N\}.$$

Nel Teorema 3.3 abbiamo provato che esiste un unico minimo di (4.2), che denotiamo con u_ε .

Supponiamo ora che N e i punti x_1, \dots, x_N non siano fissati, ma liberi di muoversi in Ω . Supponiamo anche che i gradi d_i non siano assegnati,

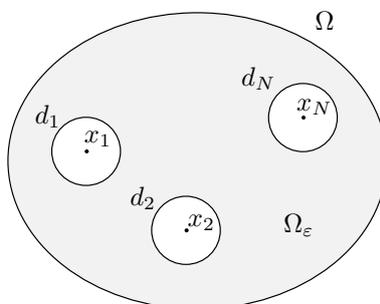


Figura 4.1: Ω_ε

ma solamente soggetti al vincolo $\sum_{i=1}^N d_i = d$. Siamo interessati a minimizzare $\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2$ (per ε piccolo) tra tutte le possibili scelte di N , x_i e d_i . Introduciamo allora lo spazio delle singularità topologiche

$$X(\bar{\Omega}) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \bar{\Omega} \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}$$

e quello delle singularità ammissibili per ε fissato

$$\mathcal{A}_\varepsilon^g = \left\{ \mu \in X(\bar{\Omega}) : \sum_{i=1}^N d_i = d, |x_i - x_j| > 4\varepsilon, \text{dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon, 1 \leq i \neq j \leq N \right\}.$$

Se $\mu \in X(\bar{\Omega})$, denotiamo con $N = |\text{supp } \mu|$, $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $d_i = \mu(\{x_i\})$. Per tale μ definiamo $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$ con $B_i := B_\varepsilon(x_i)$ ed

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu) := \{u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon(\mu); S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N\}.$$

Una $u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)$ si dice funzione *compatibile* con la misura μ . Indichiamo con $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mu) \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)$ l'unico minimo del problema (4.2), ovvero tale che

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2$$

e definiamo il funzionale energia $E_\varepsilon^g : X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{se } \mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.3)$$

Abbiamo quindi la famiglia di problemi di minimo

$$\min\{E_\varepsilon^g(\mu) : \mu \in X(\bar{\Omega})\} \quad (4.4)$$

dipendente dal parametro di scala $\varepsilon > 0$. Siamo interessati a trovare un problema limite

$$\min\{E^g(\mu) : \mu \in X(\bar{\Omega})\}$$

in modo che i suoi punti di minimo siano in relazione con i possibili punti di accumulazione di minimizzanti $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ di (4.4). Lo strumento che si utilizza per questo scopo è la Γ -convergenza introdotta nel Capitolo 2. Ricordiamo infatti il Teorema 2.4 fondamentale della Γ -convergenza: se E_ε^g Γ -converge ad E^g e μ_ε sono punti di minimo di E_ε^g tali che $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$ allora μ è punto di minimo di E^g . Se definiamo

$$\mathcal{M} := \{\text{punti limite di successioni } \{\mu_\varepsilon\} \text{ tali che } \mu_\varepsilon \text{ minimizza } E_\varepsilon^g \text{ su } X(\bar{\Omega})\}$$

vale quindi l'inclusione

$$\mathcal{M} \subseteq \{\text{punti di minimo di } E^g \text{ su } X(\bar{\Omega})\}.$$

Dunque meno minimizzanti ha E^g , meglio descriviamo il comportamento asintotico dei minimizzanti di E_ε^g . Il nostro obiettivo è quello di descrivere l'insieme \mathcal{M} .

Ricordiamo lo sviluppo asintotico dell'energia ottenuto nel Teorema 3.10: se $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g$ si ha

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \pi \sum_{i=1}^N d_i^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + W(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + o(\varepsilon) \quad (4.5)$$

dove W è l'energia rinormalizzata definita in (3.39), che non dipende da ε ma solamente da Ω , dalla posizione dei punti x_i , dai gradi d_i e dal dato al bordo g , che però è fissato.

In vista della (4.5) ci aspettiamo che eventuali punti di accumulazione di minimizzanti di E_ε^g rendano piccola l'energia, ovvero siano della forma

$$\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$$

con

1. $N = d = \deg(g; \partial\Omega)$;
2. gradi $d_i = 1$;
3. (x_1, \dots, x_d) punto di minimo di W .

Ci aspettiamo cioè che

$$\mathcal{M} \subseteq \left\{ \mu = \sum_{i=1}^d \delta_{x_i} : (x_1, \dots, x_d) \text{ punto di minimo di } W \text{ su } \bar{\Omega}^d \right\}. \quad (4.6)$$

Questo perché per rendere piccolo il termine di destra dello sviluppo (4.5) di $E_\varepsilon^g(\mu)$ è evidente che bisogna minimizzare il coefficiente di $|\log \varepsilon|$ e l'energia rinormalizzata W . Ma il problema di minimo

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^N d_i^2 : \sum_{i=1}^N d_i = d \right\}$$

ha per soluzione $N = d$ ed ogni $d_i = 1$. Con questa scelta di N e dei gradi possiamo considerare W come sola funzione della configurazione

$$(x_1, \dots, x_d) \in \bar{\Omega}^d.$$

In [BBH1, Theorem I.10] viene dimostrato che

$$W(x_1, \dots, x_d) \rightarrow +\infty$$

se

$$\min \left\{ \min_{i \neq j} |x_i - x_j|, \min_i \text{dist}(x_i, \partial\Omega) \right\} \rightarrow 0.$$

In altre parole $W \rightarrow +\infty$ se uno dei punti x_i tende a $\partial\Omega$ oppure se due punti di (x_1, \dots, x_d) tendono a sovrapporsi. Quindi

$$\min W := \min \{ W(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \bar{\Omega} \}$$

è raggiunto e ogni punto di minimo consiste di d punti distinti in Ω .

Tuttavia la (4.5) mostra anche che qualunque sia la topologia che scegliamo su $X(\bar{\Omega})$ il Γ -limite di E_ε^g sar  il funzionale $E^g \equiv +\infty$, che non ci d  nessuna informazione su \mathcal{M} , visto che $\{\text{minimizzanti di } E^g \equiv +\infty\} = X(\bar{\Omega})$. Ma lo sviluppo (4.5) ci dice anche che l'energia di E_ε^g esplose come $\log(\varepsilon^{-1})$, per cui conviene introdurre i funzionali riscaldati $F_\varepsilon^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da

$$F_\varepsilon^g(\mu) = \frac{E_\varepsilon^g(\mu)}{\log(\varepsilon^{-1})}, \quad \mu \in X(\bar{\Omega}).$$

Dal momento che E_ε^g ed F_ε^g hanno gli stessi punti di minimo, studiare \mathcal{M}   equivalente studiare la Γ -convergenza della famiglia F_ε^g .

Nel seguito proveremo il risultato di Γ -convergenza all'ordine zero, che non ci dar  l'informazione in (4.6), ma qualcosa di pi  debole. Proveremo infatti che (in una opportuna topologia su $X(\bar{\Omega})$) F_ε^g Γ -convergono ad F^g dove $F^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   il funzionale definito da

$$F^g(\mu) = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^N |d_i| = \pi \|\mu\| & \text{se } \sum_{i=1}^N d_i = d \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente F^g non   sensibile alla posizione dei punti $(x_1, \dots, x_N) \in \bar{\Omega}^N$ della misura μ , ma solamente ai pesi di tali punti. Per questo motivo non otteniamo la (4.6). Notiamo infatti che $\min F^g$   raggiunto dai punti di $X(\bar{\Omega})$ della forma

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \leq d, d_i > 0, \sum_{i=1}^N d_i = d \right\}.$$

per cui dalla Γ -convergenza all'ordine zero abbiamo l'informazione $\mathcal{M} \subseteq S$. Per ottenere la (4.6)   necessario studiare la Γ -convergenza all'ordine successivo, come accenneremo nel Capitolo 5.

4.1 Problema senza dato al bordo

Al fine di dimostrare il risultato di Γ -convergenza all'ordine zero per i funzionali F_ε^g definiti su $X(\bar{\Omega})$ conviene prima studiare un analogo problema senza dato al bordo assegnato.

Introduciamo lo spazio delle singolarit  topologiche

$$X(\Omega) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\} \quad (4.7)$$

e quello delle singolarit  ammissibili per ε fissato

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{ \mu \in X(\Omega) : |x_i - x_j| > 4\varepsilon, \text{dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon, 1 \leq i \neq j \leq N \}. \quad (4.8)$$

Se $\mu \in X(\Omega)$, indichiamo con $N = |\text{supp } \mu|$, $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $d_i = \mu(\{x_i\})$. Sia $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$ con $B_i := B_\varepsilon(x_i)$ ed

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mu) := \{ u \in H^1(\Omega_\varepsilon(\mu); S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i, i = 1, \dots, N \}. \quad (4.9)$$

Notiamo che se $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$ per invarianza omotopica del grado topologico si ha $\deg(u; \partial\Omega) = \sum_{i=1}^N d_i$.

Consideriamo il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2 \quad (4.10)$$

che sappiamo ammettere soluzione per il Teorema 3.22.

Indichiamo con $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mu) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$ un punto di minimo di (4.10) e definiamo il funzionale energia $E_\varepsilon: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$E_\varepsilon(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{se } \mu \in A_\varepsilon \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.11)$$

Abbiamo quindi la famiglia di problemi di minimo

$$\min\{E_\varepsilon(\mu) : \mu \in X(\Omega)\}$$

dipendente dal parametro di scala $\varepsilon > 0$ e vogliamo studiare la Γ -convergenza degli E_ε . Lo sviluppo asintotico dell'energia (4.5) per i funzionali E_ε^g suggerisce che anche gli E_ε esplodano come $|\log \varepsilon|$. Introduciamo quindi i funzionali riscaldati $F_\varepsilon: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da

$$F_\varepsilon(\mu) = \frac{E_\varepsilon(\mu)}{\log(\varepsilon^{-1})}, \quad \mu \in X(\Omega). \quad (4.12)$$

Nel seguito proveremo che (in una opportuna topologia su $X(\Omega)$) gli F_ε sono equicoercivi e Γ -convergono ad F dove $F: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è il funzionale definito da

$$F(\mu) = \pi \sum_{i=1}^N |d_i| = \pi \|\mu\|. \quad (4.13)$$

4.2 La giusta topologia su $X(\Omega)$

Ci poniamo il problema di trovare una topologia su $X(\Omega)$ in modo che i funzionali F_ε definiti in (4.12) siano equicoercivi, ovvero tali che

$$F_\varepsilon(\mu_\varepsilon) \leq C$$

implica che esiste $\mu \in X(\Omega)$ e una successione $\varepsilon_n \searrow 0$ tale che $\mu_{\varepsilon_n} \rightarrow \mu$.

Dal momento che $X(\Omega) \subset M(\Omega)$ su $X(\Omega)$ ci sono le topologie indotte dalla norma variazione totale e quella *-debole di misure (per dettagli e notazioni sugli spazi di misure si veda l'Appendice A.3). Tuttavia con la topologia *-debole non si ha equicoercività. Per provarlo costruiamo un controesempio.

Controesempio dei dipoli. Un *dipolo* è una coppia di cariche di segno opposto: $D = \delta_x - \delta_y$ con $x, y \in \Omega$. La distanza $|x - y|$ si dice *lunghezza* del dipolo. Notiamo che $\|D\| = 2$. Aggiungendo un numero opportuno di dipoli possiamo costruire una successione $\mu_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$ tale che $F_\varepsilon(\mu_\varepsilon) \leq C$ ma che non ammette nessuna sottosuccessione convergente nella topologia *-debole, mostrando che i funzionali F_ε non sono equicoercivi.

Vediamo intanto quanta energia ha un dipolo. Siano $x, y \in B_4(0)$ e consideriamo il dominio $A = B_4(0) \setminus (B_1(x) \cup B_1(y))$ con $x, y \in B_4(0)$ scelti in modo

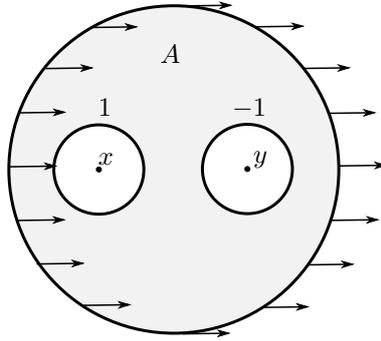


Figura 4.2: Dominio A

tale che $B_1(x) \cap B_1(y) = \emptyset$ e che $B_1(x), B_1(y) \subset B_4(0)$ (si veda la Figura 4.2). Assegnamo dato al bordo $g \equiv 1$ su $\partial B_4(0)$. Per il Teorema 3.3 esiste un'unica soluzione $v \in H_1^1(A; S^1)$ del problema di minimo

$$\min_{u \in H_1^1(A; S^1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 : \deg(u; \partial B_1(x)) = 1, \deg(u; \partial B_1(y)) = -1 \right\}$$

essendo $\deg(1; \partial B_4(0)) = 0$. Diciamo che la quantità $c = \frac{1}{2} \int_A |\nabla v|^2$ è l'energia del dipolo D . Riscaldiamo il dominio A come $\varepsilon A = \{\varepsilon x : x \in A\}$ e la soluzione come $v_\varepsilon : \varepsilon A \rightarrow S^1$ definita da $v_\varepsilon(x) = v(\frac{x}{\varepsilon})$. Un cambio di variabili mostra che v_ε ha la stessa energia di v , ovvero $\frac{1}{2} \int_{\varepsilon A} |\nabla v_\varepsilon|^2 = c$. Dunque il dipolo riscaldato $D_\varepsilon = \delta_{\varepsilon x} - \delta_{\varepsilon y}$ ha lunghezza piccola a piacere $\varepsilon|x - y|$ ma ha la stessa energia di D .

Consideriamo ora n dipoli $D_n = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} - \delta_{y_i}$ con i punti $x_i, y_i \in \Omega$ che siano distanti tra loro di almeno 4ε , che distino dal bordo almeno di 2ε e che $|x_i - y_i| = 4\varepsilon$. Poniamo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n (B_\varepsilon(x_i) \cup B_\varepsilon(y_i))$. In tal modo $D_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$ cosicchè il problema

$$\min_{u \in H_1^1(\Omega_\varepsilon; S^1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 : \deg(u; \partial B_\varepsilon(x_i)) = 1, \deg(u; \partial B_\varepsilon(y_i)) = -1 \right\} \quad (4.14)$$

ammette unica soluzione u_ε e si ha per definizione $E_\varepsilon(D_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2$. Tra le funzioni ammissibili nel problema di minimo (4.14) c'è anche v_ε definita da

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} v_{\varepsilon,i}(x) & \text{se } x \in A_i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $v_{\varepsilon,i}$ è soluzione del problema di minimo

$$\min_{u \in H_1^1(A_i; S^1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{A_i} |\nabla u|^2 : \deg(u; \partial B_\varepsilon(x_i)) = 1, \deg(u; \partial B_\varepsilon(y_i)) = -1 \right\}$$

con A_i palla che contiene il dipolo $\delta_{x_i} - \delta_{y_i}$, come nel caso del dominio A definito sopra (si veda la Figura 4.3). Essendo u_ε minimo, si ha

$$E_\varepsilon(D_n) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{A_i} |\nabla v_{\varepsilon,i}|^2 = nc.$$

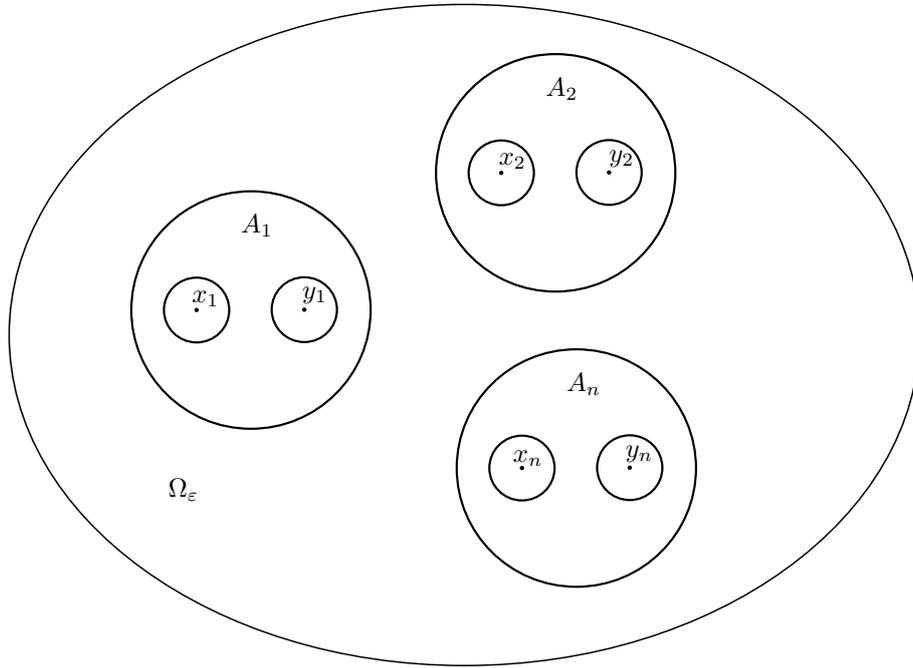


Figura 4.3: Dominio Ω_ε

Dunque

$$F_\varepsilon(D_n) = \frac{E_\varepsilon(D_n)}{|\log \varepsilon|} \leq \frac{nc}{|\log \varepsilon|}. \quad (4.15)$$

Possiamo allora costruire una successione D_ε che contenga esattamente $\lfloor \log \varepsilon^{-1} \rfloor$ dipoli¹. In questo modo la (4.15) ci dà la condizione

$$F_\varepsilon(D_\varepsilon) \leq c. \quad (4.16)$$

Tuttavia, visto che un dipolo ha massa 2 si ha

$$\|D_\varepsilon\| = 2 \lfloor \log \varepsilon^{-1} \rfloor \quad (4.17)$$

che diverge per $\varepsilon \rightarrow 0$. Per il principio di uniforme limitatezza² la successione $\{D_\varepsilon\}$ non può ammettere sottosuccessioni convergenti *-debolmente. ■

Il problema nel controesempio dei dipoli è che vale il principio di uniforme limitatezza, che non permette ad una successione di misure con variazione totale illimitata di avere estratte convergenti nella topologia *-debole. Quindi su X dobbiamo mettere una topologia più debole di quella *-debole. Ricordiamo che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ se e solo se

$$\int_\Omega f d\mu_n \rightarrow \int_\Omega f d\mu \quad \text{per ogni } f \in C_0(\Omega). \quad (4.18)$$

¹Questo possiamo sempre farlo se ε è piccolo. Infatti il numero di dipoli di lunghezza 4ε che possono essere contenuti in Ω è dell'ordine di $K\varepsilon^{-1}$, ed essendo $|\log \varepsilon| \ll \varepsilon^{-1}$ è sempre possibile costruire $D_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \delta_{x_i} - \delta_{y_i}$ con $n(\varepsilon) = \lfloor \log \varepsilon^{-1} \rfloor$, in modo che $D_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

²Si veda il Teorema A.11 in Appendice A.3.

Indeboliamo la convergenza *-debole se richiediamo che la (4.18) valga per funzioni più regolari di quelle in $C_0(\Omega)$. La scelta giusta è testare contro le funzioni $\text{Lip}_0(\Omega)$. Notiamo che l'inclusione $\text{Lip}_0(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ è continua. Ricordiamo infatti che

$$\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

è una norma su $\text{Lip}_0(\Omega)$, equivalente a quella classica

$$\sup_{x \in \Omega} |f| + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Se fissiamo $\hat{y} \in \partial\Omega$ abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_0(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f(\hat{y})| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sup_{x \in \Omega} |x - \hat{y}| \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \end{aligned}$$

essendo $f(\hat{y}) = 0$. Dall'inclusione continua $\text{Lip}_0(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ segue la continuità dell'inclusione dei duali

$$C_0(\Omega)^* \subset \text{Lip}_0(\Omega)^* \quad (4.19)$$

Poiché $M(\Omega) \cong C_0(\Omega)^*$ la (4.19) implica che possiamo vedere $M(\Omega)$ come immerso con continuità in $\text{Lip}_0(\Omega)^*$. E' dunque naturale la seguente definizione di norma su $M(\Omega)$:

Definizione 4.1. La topologia indotta su $M(\Omega)$ dalla norma di $\text{Lip}_0(\Omega)^*$ si dice topologia della *norma flat*. Esplicitamente, se $\mu \in M(\Omega)$

$$\|\mu\|_{\text{flat}} := \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(\Omega) \\ \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_{\Omega} f d\mu \right|.$$

Se $\mu_n \in M(\Omega)$ diciamo che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ se $\|\mu_n - \mu\|_{\text{flat}} \rightarrow 0$.

Possiamo calcolare esplicitamente la norma flat degli elementi di $X(\Omega)$.

Lemma 4.2. *Si ha che*

1. $\|\delta_x\|_{\text{flat}} = \text{dist}(x, \partial\Omega)$
2. se $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ e $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ si ha

$$\|\mu\|_{\text{flat}} = \sum_{i=1}^n \text{dist}(x_i, \partial\Omega)$$

3. se $D = \delta_x - \delta_y$ è un dipolo, allora

$$\|D\|_{\text{flat}} = \min \{ |x - y|, \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega) \}.$$

Dimostrazione. 1. Se $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ allora per ogni $z \in \partial\Omega$ si ha $f(z) = 0$ e quindi

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| = |f(x) - f(z)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} |x - z| \quad (4.20)$$

Prendendo l'estremo inferiore sugli $z \in \partial\Omega$ in (4.20) otteniamo

$$|\delta_x(f)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Quindi

$$\|\delta_x\|_{\text{flat}} = \sup_{\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1} |\delta_x(f)| \leq \text{dist}(x, \partial\Omega). \quad (4.21)$$

Poiché Ω è regolare la funzione distanza dal bordo $f(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ è in $\text{Lip}_0(\Omega)$ con costante di Lipschitz pari ad 1. Quindi si ha

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| = \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

e la (4.21) vale con l'uguale.

2. Per semplicità di notazioni dimostriamo l'enunciato nel caso $\mu = \delta_x + \delta_y$. Il caso in cui $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ con $n > 2$ si prova similmente. Siano $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ e $z_1, z_2 \in \partial\Omega$. Allora

$$\begin{aligned} |\mu(f)| &= |f(x) + f(y)| \leq |f(x) - f(z_1)| + |f(y) - f(z_2)| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} (|x - z_1| + |y - z_2|) \end{aligned}$$

e quindi passando all'estremo inferiore su $z_1, z_2 \in \partial\Omega$

$$|\mu(f)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} (\text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega)). \quad (4.22)$$

Passando all'estremo superiore sulle $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ con $\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1$ si ha

$$\|\mu\|_{\text{flat}} \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega). \quad (4.23)$$

Come nel punto precedente, la funzione $f(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ realizza l'uguaglianza in (4.22) e quindi la (4.23) vale con l'uguale.

3. Se $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$

$$|D(f)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} |x - y|$$

e al sup sulle f con $\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1$ si ha

$$\|D\|_{\text{flat}} \leq |x - y|. \quad (4.24)$$

Analogamente, se $z_1, z_2 \in \partial\Omega$ si ha

$$\begin{aligned} |D(f)| &= |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z_1)| + |f(z_2) - f(y)| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} (|x - z_1| + |y - z_2|) \end{aligned}$$

e quindi passando all'estremo inferiore su $z_1, z_2 \in \partial\Omega$ e poi al sup sulle $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ con $\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1$ si ha

$$\|D\|_{\text{flat}} \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega)$$

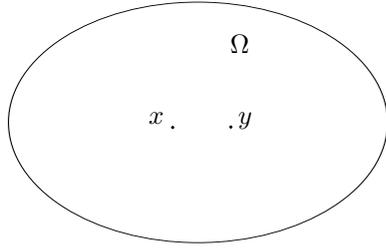


Figura 4.4: Primo caso

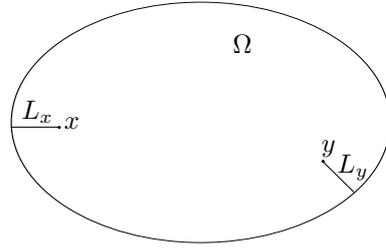


Figura 4.5: Secondo caso

che insieme alla (4.24) fornisce

$$\|D\|_{\text{flat}} \leq \min \{|x - y|, \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega)\} . \quad (4.25)$$

Dimostriamo che vale anche la disuguaglianza opposta. Ci sono due casi.

Nel primo caso (si veda la Figura 4.4), supponiamo che valga

$$|x - y| \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega) \quad (4.26)$$

Poiché vale la (4.26), si ha che il segmento che connette x ad y è tutto contenuto in Ω . Consideriamo la funzione definita sul segmento che connette x ad y che vale $f(z) = |z - y|$, in modo che $f(x) = |x - y|$ e $f(y) = 0$. La f è 1-Lipschitz. Possiamo estenderla ad una funzione $\tilde{f} \in \text{Lip}_0(\Omega)$ che sia ancora 1-Lipschitz. Ma allora

$$\left|D(\tilde{f})\right| = |f(x) - f(y)| = |x - y| \stackrel{(4.26)}{=} \min \{|x - y|, \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega)\}$$

e quindi la (4.25) vale con l'uguale.

Nel secondo caso supponiamo che

$$\text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega) \leq |x - y| . \quad (4.27)$$

Sia L_x il segmento di lunghezza $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ che connette x a $\partial\Omega$. Analogamente sia L_y quello di lunghezza $\text{dist}(y, \partial\Omega)$ che connette y a $\partial\Omega$ (si veda la Figura 4.5). Definiamo la funzione f tale che

$$f(z) = \begin{cases} \text{dist}(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in L_x \\ -\text{dist}(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in L_y \\ 0 & \text{se } z \in \partial\Omega \end{cases}$$

Dunque f è 1-Lipschitziana su $\partial\Omega \cup L_x \cup L_y$ e si annulla su $\partial\Omega$. Possiamo quindi estenderla ad una funzione $\tilde{f} \in \text{Lip}_0(\Omega)$ che abbia ancora 1 come costante di Lipschitz. Ma allora

$$\begin{aligned} \left|D(\tilde{f})\right| &= |f(x) - f(y)| = \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega) \\ &\stackrel{(4.27)}{=} \min \{|x - y|, \text{dist}(x, \partial\Omega) + \text{dist}(y, \partial\Omega)\} \end{aligned}$$

e la (4.25) vale con l'uguale. \square

In generale se $\mu = \sum_{i=1}^n d_i \delta_{x_i}$ con $d_i = \pm 1$ abbiamo che $\|\mu\|_{\text{flat}}$ è pari alla connessione minima tra i punti x_1, \dots, x_n ai quali attribuiamo il segno di d_i , mentre il bordo di Ω ha segno arbitrario. Per essere più precisi, introduciamo la famiglia delle somme finite formali di segmenti contenuti in $\bar{\Omega}$ con molteplicità intera

$$\mathcal{S}(\bar{\Omega}) := \left\{ S = \sum_{i=1}^n m_i L_i : n \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{Z}, L_i \subset \bar{\Omega} \right\} \quad (4.28)$$

e definiamo l'operatore di bordo

$$\partial S := \sum_{i=1}^n m_i (\delta_{y_i} - \delta_{x_i})$$

se L_i è il segmento orientato che connette x_i ad y_i . Definiamo la massa di S come

$$|S| := \sum_{i=1}^n |m_i| |x_i - y_i|$$

Vale il seguente:

Teorema 4.3. *Sia $\mu \in X(\Omega)$, allora*

$$\|\mu\|_{\text{flat}} = \inf \{ |S| : S \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}), \partial S \llcorner \Omega = \mu \} \quad (4.29)$$

dove $(\partial S \llcorner \Omega)(B) = \partial S(\Omega \cap B)$ per ogni boreliano di \mathbb{R}^2 .

La dimostrazione di questo Teorema si può trovare sul libro di Federer [Fe]: la (4.29) è la definizione di norma flat per 0-correnti integrali, mentre la norma della variazione totale su $X(\Omega)$ coincide invece con la norma della massa di 0-correnti integrali.

Raccogliamo ora alcune osservazioni sulla norma flat e sulle altre due topologie presenti su $M(\Omega)$.

Proposizione 4.4. *Valgono le seguenti:*

1. per ogni $\mu \in M(\Omega)$ si ha

$$\|\mu\|_{\text{flat}} \leq \text{diam}(\Omega) \|\mu\|;$$

2. sia $\{x_n\} \subset \Omega$ tale che $x_n \rightarrow x$,

$$(a) \text{ se } x \in \Omega \text{ allora } \delta_{x_n} \xrightarrow{\text{flat}} \delta_x \text{ e } \delta_{x_n} \xrightarrow{*} \delta_x;$$

$$(b) \text{ se } x \in \partial\Omega \text{ allora } \delta_{x_n} \xrightarrow{\text{flat}} 0 \text{ e } \delta_{x_n} \xrightarrow{*} 0;$$

3. se $\mu_n \in X(\Omega)$ ed esiste $C \geq 0$ tale che $\|\mu_n\| \leq C$ allora esiste estratta $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ con $\mu \in X(\Omega)$;

4. non vale il viceversa, cioè possiamo costruire una successione $\mu_n \in X(\Omega)$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ con $\mu \in X(\Omega)$, ma tale che $\|\mu_n\| \rightarrow +\infty$;

5. l'insieme $X(\Omega)$ non è chiuso in norma flat;

6. l'insieme $X(\Omega)$ è *-debolmente chiuso.

Dimostrazione. 1. Sia $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$, allora per $y \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} |\mu(f)| &\leq \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \|\mu\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f(y)| \|\mu\| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sup_{x \in \Omega} |x - y| \|\mu\| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \text{diam}(\Omega) \|\mu\| \end{aligned}$$

e al sup sulle $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ con $\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \leq 1$ segue la tesi.

2. Per definizione di convergenza *-debole segue che $\delta_{x_n} \xrightarrow{*} \delta_x$. Sia poi $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$. Allora

$$|(\delta_{x_n} - \delta_x)(f)| = |f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} |x_n - x|$$

da cui

$$\|\delta_{x_n} - \delta_x\|_{\text{flat}} \leq |x_n - x| \rightarrow 0.$$

3. μ_n è della forma $\mu_n = \sum_{i=1}^{N_n} d_{i,n} \delta_{x_{i,n}}$. Allora

$$N_n = \sum_{i=1}^{N_n} 1 \leq \sum_{i=1}^{N_n} |d_{i,n}| = \|\mu_n\| \leq C$$

dunque $\{N_n\} \subset \mathbb{N}$ è una successione limitata e quindi ammette estratta N_{n_k} convergente ad un certo $N \in \mathbb{N}$. Poiché N_n è una successione a valori in \mathbb{N} segue che $N_{n_k} = N$ definitivamente. Quindi a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che $N_n = N$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente

$$|d_{j,n}| \leq \sum_{i=1}^N |d_{i,n}| = \|\mu_n\| \leq C$$

e quindi a meno di fare N estrazioni successive da μ_n possiamo supporre che $d_{j,n} = d_j$ per qualche $d_j \in \mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi μ_n è della forma $\mu_n = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_{i,n}}$. Essendo Ω limitato, per ogni j fissato la successione $\{x_{j,n}\} \subset \Omega$ ammette estratta convergente ad un certo $x_j \in \bar{\Omega}$. A meno di fare N estrazioni successive, possiamo supporre che $x_{j,n} \rightarrow x_j$ per ogni $j = 1, \dots, N$. Poiché $\delta_{x_{j,n}} \xrightarrow{\text{flat}} \delta_{x_j}$ se $x_j \in \Omega$, mentre $\delta_{x_{j,n}} \xrightarrow{\text{flat}} 0$ se $x_j \in \partial\Omega$, definendo

$$\mu = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \in \Omega}}^N d_j \delta_{x_j}$$

abbiamo che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$.

4. E' l'esempio dei dipoli visto a pagina 76, che riprenderemo dopo la dimostrazione.

5. Basta considerare due successioni di punti $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \Omega$ tali che $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n^2}$ e che convergano entrambe allo stesso limite z . Definiamo la successione $D_n = \sum_{k=1}^n (\delta_{x_k} - \delta_{y_k})$ che è contenuta in $X(\Omega)$. Se $D = \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta_{x_k} - \delta_{y_k})$, utilizzando le funzioni Lipschitziane abbiamo

$$\|D_n - D\|_{\text{flat}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow +\infty$$

che conclude la dimostrazione perché $D \notin X(\Omega)$.

6. Se $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ è tale che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, dal principio di uniforme limitatezza segue che $\|\mu_n\| \leq C$. A questo punto si procede come nella dimostrazione del punto 3. \square

Un'ultima proprietà della convergenza flat che enunciamo senza dimostrazione è la seguente:

Teorema 4.5 ([Fe]). *La variazione totale è debolmente semicontinua inferiormente rispetto alla norma flat. Esplicitamente, se $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ è tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ allora*

$$\|\mu\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n\|. \quad (4.30)$$

Il significato geometrico della (4.30) per misure in $X(\Omega)$ è che al limite non si può creare massa: al più può accadere che dei dipoli si annichiscano o che delle cariche vadano su $\partial\Omega$, diminuendo la massa totale.

Con la topologia flat il controesempio dei dipoli a pagina 76 non è più un controesempio:

Dipoli in norma flat Avevamo definito una successione $D_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (\delta_{x_i} - \delta_{y_i})$ tale che $n(\varepsilon) = \lfloor |\log \varepsilon| \rfloor$, $|x_i - y_i| = 4\varepsilon$ e infine $F_\varepsilon(D_\varepsilon) \leq C$. Si aveva che $\|D_\varepsilon\| = 2\lfloor |\log \varepsilon| \rfloor$ e quindi non esistono estratte convergenti nella topologia *-debole. Tuttavia $D_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} 0$ perché

$$|D_\varepsilon(f)| \leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} |f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} |x_\varepsilon - y_\varepsilon| = \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} 4\varepsilon n(\varepsilon)$$

da cui

$$\|D_\varepsilon\|_{\text{flat}} \leq 4\varepsilon |\log \varepsilon| \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

e quindi D_ε non è più un controesempio per la equicoercività della famiglia F_ε . \blacksquare

4.3 Risultato di Γ -convergenza senza dato al bordo

Siamo ora pronti a enunciare il Teorema di Γ -convergenza per i funzionali F_ε . Ricordiamo che i funzionali $F_\varepsilon: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sono definiti da

$$F_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{|\log \varepsilon|}$$

dove gli E_ε sono i funzionali definiti in (4.11) ed $F: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è definito da

$$F(\mu) = \pi \|\mu\| = \pi \sum_{i=1}^N |d_i|.$$

se $\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$.

Teorema 4.6. *Si ha che $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ rispetto alla topologia flat. Nel dettaglio, se fissiamo una arbitraria successione $\varepsilon_n \searrow 0$ si ha:*

1. (Γ -lim inf) *per ogni successione $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ tale che $\mu_n \xrightarrow{flat} \mu$ con $\mu \in X(\Omega)$ vale*

$$F(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n);$$

2. (Γ -lim sup) *per ogni $\mu \in X(\Omega)$ esiste una recovery sequence $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ tale che $\mu_n \xrightarrow{flat} \mu$ e*

$$F(\mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n).$$

Inoltre la famiglia $\{F_\varepsilon\}$ è equicoerciva: se $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ è tale che

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

con $C \geq 0$ costante indipendente da n , allora esiste una sottosuccessione $\{\mu_{n_k}\}$ e una $\mu \in X(\Omega)$ tale che $\mu_{n_k} \xrightarrow{flat} \mu$.

Cominciamo a dimostrare la parte più semplice, ovvero la disuguaglianza di Γ -lim sup. Prima di procedere alla dimostrazione abbiamo bisogno di un Lemma tecnico che useremo spesso nel seguito.

Lemma 4.7 (Split di misure). *Sia $\mu \in X(\Omega)$. Per ogni $\rho > 0$ fissato esiste una misura $\nu \in X(\Omega)$ della forma*

$$\nu = \sum_{i=1}^M p_i \delta_{y_i}$$

tale che

1. $|p_i| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, M$;
2. $\|\mu - \nu\|_{flat} \leq \rho$;
3. $\|\mu\| = \|\nu\|$.

Dimostrazione. Se $\mu \in X(\Omega)$ è della forma $\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$ l'idea è quella di costruire la misura ν dividendo il vortice $d_i \delta_{x_i}$ in d_i vortici di peso pari al segno di d_i . Sia

$$R = \min \left\{ \min_i \text{dist}(x_i, \partial\Omega), \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \right\}$$

ed $\eta > 0$ tale che

$$\eta \leq \min \left\{ \frac{R}{2}, \frac{\rho}{\|\mu\|} \right\}.$$

Se il vortice x_i ha peso $|d_i| = 1$ non facciamo niente, cioè definiamo $y_1^i = x_i$ e $p_1^i = d_i$. Se invece $|d_i| \geq 2$ siano $y_1^i, \dots, y_{|d_i|}^i$ i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro x_i e raggio η e $p_j^i = \text{sign } d_i$ (si veda per esempio la Figura 4.6). Definiamo

$$\nu = \sum_{i=1}^N \nu_i, \quad \nu_i = \sum_{j=1}^{|d_i|} \text{sign } d_i \delta_{y_j^i}$$

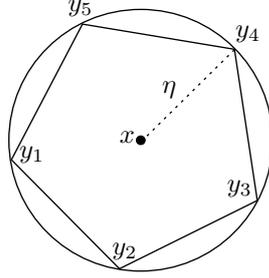


Figura 4.6: Split del vortice $5x$

in modo che $\nu \in X(\Omega)$ con pesi tutti pari a ± 1 e

$$\|\nu\| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{|d_i|} |\text{sign } d_i| = \sum_{i=1}^N |d_i| = \|\mu\|.$$

Infine

$$\|\mu - \nu\|_{\text{flat}} = \left\| \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} - \sum_{i=1}^N \nu_i \right\|_{\text{flat}} \leq \sum_{i=1}^N \|d_i \delta_{x_i} - \nu_i\|_{\text{flat}} \quad (4.31)$$

Se $|d_i| = 1$ allora

$$\|d_i \delta_{x_i} - \nu_i\|_{\text{flat}} = \left\| d_i \delta_{x_i} - \text{sign } d_i \delta_{y_1^i} \right\|_{\text{flat}} = 0 \leq \eta |d_i| \quad (4.32)$$

mentre se $|d_i| \geq 2$, data $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} |(d_i \delta_{x_i} - \nu_i)(f)| &= \left| d_i f(x_i) - \sum_{j=1}^{|d_i|} \text{sign } d_i f(y_j^i) \right| \leq \sum_{j=1}^{|d_i|} |f(x_i) - f(y_j^i)| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sum_{j=1}^{|d_i|} |x_i - y_j^i| = \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \eta |d_i| \end{aligned}$$

e quindi

$$\|d_i \delta_{x_i} - \nu_i\|_{\text{flat}} \leq \eta |d_i|. \quad (4.33)$$

Sostituendo le (4.32) e (4.33) in (4.31) si ottiene

$$\|\mu - \nu\|_{\text{flat}} \leq \eta \sum_{i=1}^N |d_i| = \eta \|\mu\| \leq \rho$$

per come abbiamo scelto η . \square

Dimostrazione della disuguaglianza di Γ -lim sup. Passo 1. Supponiamo dapprima che $\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$ con pesi tali che $|d_i| = 1$. Sia

$$R = \min \left\{ \min_i \text{dist}(x_i, \partial\Omega), \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \right\}.$$

Poiché $\varepsilon_n \searrow 0$, a meno di scartare un numero finito di termini, possiamo supporre che $\varepsilon_n < \frac{R}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > R > 4\varepsilon_n > 2\varepsilon_n \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

e

$$|x_i - x_j| > R > 4\varepsilon_n \quad \text{per } 1 \leq i \neq j \leq N$$

per cui $\mu \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$, dove A_ε è stato definito in (4.8). Per definizione si ha

$$F_{\varepsilon_n}(\mu) = \min_{v \in \mathcal{U}_{\varepsilon_n}(\mu)} \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla v|^2 = \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2$$

dove

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_n}(\mu) = \{v \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n}; S^1) : \deg(v; \partial B_i) = d_i, i = 1, \dots, N\}$$

e

$$\Omega_{\varepsilon_n}(\mu) = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N B_i, \quad B_i = B_{\varepsilon_n}(x_i).$$

Scegliamo come particolare funzione in $\mathcal{U}_{\varepsilon_n}(\mu)$ la

$$v_{\varepsilon_n}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}} & \text{se } x \in B_R(x_i) \setminus B_{\varepsilon_n}(x_i) \\ \tilde{v}(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove il prodotto è quello di \mathbb{C} . La funzione $\tilde{v} \in H^1(\Omega_R; S^1)$, con

$$\Omega_R = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N B_R(x_i),$$

è scelta in modo tale che $v_{\varepsilon_n} \in \mathcal{U}_{\varepsilon_n}(\mu)$ ³. Essendo $F_{\varepsilon_n}(\mu)$ definita come minimo, si ha

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_n}(\mu) &\leq \frac{1}{|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \\ &= \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \left[\int_{\Omega_R} |\nabla \tilde{v}|^2 + \sum_{i=1}^N \int_{B_R(x_i) \setminus B_{\varepsilon_n}(x_i)} \left| \nabla \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \left[\|\nabla \tilde{v}\|_{L^2(\Omega_R)} + 2\pi N (\log R - \log \varepsilon_n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi N. \end{aligned}$$

Quindi prendendo come *recovery sequence* la successione costante $\mu_n = \mu$ otteniamo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu) \leq \pi N$$

Osservando che $\|\mu\| = N$, essendo i pesi di μ tutti ± 1 , si ha la tesi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq \pi N = \pi \|\mu\| = F(\mu).$$

Passo 2. Sia ora $\mu \in X(\Omega)$ generica. Come nel passo precedente possiamo supporre che $\mu \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il Lemma 4.7 per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\mu_k \in X(\Omega)$ tale che

³E' sempre possibile farlo. Infatti è sufficiente considerare un lifting φ_n di v_{ε_n} ristretta ad $A_n := \cup_{i=1}^N (B_R(x_i) \setminus B_{\varepsilon_n}(x_i))$, che sarà $\varphi_n \in H^1(A_n; \mathbb{R})$ ed estenderlo in tutto Ω_ε . A questo punto si pone $\tilde{v}_{\varepsilon_n} = e^{i\varphi_n}$ su Ω_R .

1. $\|\mu_k - \mu\|_{\text{flat}} \leq \frac{1}{k}$;
2. $\|\mu_k\| = \|\mu\|$, dunque $F(\mu_k) = F(\mu)$;
3. μ_k ha tutti pesi ± 1 .

Alle μ_k si applica il passo precedente: la successione costante $\mu_k^n = \mu_k$ è una *recovery sequence* per μ_k , cioè è tale che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_k^n) \leq F(\mu_k) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

e quindi, poiché $F(\mu_k) = F(\mu)$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_k) \leq F(\mu) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ fissato.} \quad (4.34)$$

Poniamo $N_0 = 1$. La (4.34) per $k = 2$ assicura che esiste un $N_1 \in \mathbb{N}$ con $N_1 > N_0$ tale che

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_2) \leq F(\mu) + \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } n > N_1 .$$

Analogamente esiste un $N_2 \in \mathbb{N}$ con $N_2 > N_1$ tale che

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_3) \leq F(\mu) + \frac{1}{3} \quad \text{per ogni } n > N_2 .$$

Procedendo in questo modo esiste $N_k \in \mathbb{N}$ con $N_k > N_{k-1}$ tale che

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_{k+1}) \leq F(\mu) + \frac{1}{k+1} \quad \text{per ogni } n > N_k . \quad (4.35)$$

Costruiamo la successione di indici

$$k(n) := i \quad \text{se } N_{i-1} < n \leq N_i . \quad (4.36)$$

In questo modo $k(n) \rightarrow +\infty$ se $n \rightarrow +\infty$ e quindi $\mu_{k(n)} \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ se $n \rightarrow +\infty$. La $\mu_{k(n)}$ è una *recovery sequence* perché vale

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_{k(n)}) \leq F(\mu) . \quad (4.37)$$

Infatti per la (4.35) abbiamo

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_{k(n)}) \leq F(\mu) + \frac{1}{k(n)} \quad \text{se } n > N_{i-1}$$

con $i = k(n)$. Passando al limite superiore in questa ultima disuguaglianza otteniamo la (4.37). □

La disuguaglianza di Γ -lim inf e l'equicoercività si dimostrano con tecniche tra loro simili, ma abbiamo bisogno di fare delle stime dal basso dell'energia F_ε . La stima prototipo è quella sulle corone del Teorema 1.54, che riadattiamo alle notazioni di questo Capitolo:

Teorema 4.8 (Stima sulle corone). *Sia $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ e indichiamo*

$$\text{supp}(\mu) = \{x_1, \dots, x_N\}$$

e $d_i = \mu(\{x_i\})$. Sia $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$, come definito in (4.9). Siano $\varepsilon \leq r < R$ tali che $B_R(x_i) \subset \Omega_\varepsilon(\mu)$. Allora

$$\frac{1}{2} \int_{B_R(x_i) \setminus B_r(x_i)} |\nabla u|^2 \geq \pi |d_i|^2 \log \frac{R}{r}$$

e in particolare

$$\frac{1}{2} \int_{B_R(x_i) \setminus B_r(x_i)} |\nabla u|^2 \geq \pi |d_i| \log \frac{R}{r}. \quad (4.38)$$

Come conseguenza immediata abbiamo una stima dal basso dell'energia delle funzioni di $\mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$:

Corollario 4.9. *Sia $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ ed $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$. Allora*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2 \geq F(\mu) \log 2. \quad (4.39)$$

Dimostrazione. Applicando la (4.38) con $r = \varepsilon$ ed $R = 2\varepsilon$ si ha

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2\varepsilon}(x_i) \setminus B_\varepsilon(x_i)} |\nabla u|^2 \geq \pi |d_i| \log 2. \quad (4.40)$$

Usando (4.40) su ogni corona,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2 &\geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{B_{2\varepsilon}(x_i) \setminus B_\varepsilon(x_i)} |\nabla u|^2 \\ &\geq \pi \sum_{i=1}^N |d_i| \log 2 = F(\mu) \log 2 \end{aligned}$$

ottenendo la (4.39). □

Dunque sappiamo stimare l'energia dal basso sulle corone. Osserviamo che per $\mu \in X(\Omega)$ e $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$ la stima

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2 \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{B_{R_i}(x_i) \setminus B_{r_i}(x_i)} |\nabla u|^2 \geq \pi \sum_{i=1}^N |d_i| \log \frac{R_i}{r_i} \quad (4.41)$$

vale nel momento in cui le corone $B_{R_i}(x_i) \setminus B_{r_i}(x_i)$ soddisfano

1. $\varepsilon \leq r_i < R_i$;
2. $\partial B_{R_i}(x_i) \subset \Omega_\varepsilon(\mu)$;
3. $B_{R_i}(x_i) \cap B_{R_j}(x_j) = \emptyset$ per $i \neq j$.

La questione è quale sia il modo ottimale di selezionare le corone in $\Omega_\varepsilon(\mu)$ affinché l'energia del membro di destra di (4.41) sia la massima possibile. Una soluzione per questo problema è stata data da E. Sandier che in [Sa] ha introdotto la *ball construction*. L'idea della *ball construction* è quella di considerare un tempo fittizio t e la famiglia di palle al tempo $t = 0$ generata da $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$

$$\mathcal{B}(0) = \{B_\varepsilon(x_i), \dots, B_\varepsilon(x_N)\}.$$

A partire da $\mathcal{B}(0)$ si costruisce una famiglia di palle $\mathcal{B}(t)$ tale che per $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu)$ e per $B \in \mathcal{B}(t)$ tale che $B \subset \Omega$, valga la stima

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B} |\nabla u|^2 \geq \pi |\mu(B)| |\log(1+t)|$$

che è simile alla stima sulle corone (4.41), ma ha il vantaggio che nel membro di destra compare il tempo t , che potremo scegliere in modo che la quantità a destra sia sufficientemente grande.

4.4 Ball construction

Presentiamo in questo Paragrafo la *ball construction*, seguendo l'idea originale di E. Sandier come presentata da R. Alicandro e M. Ponsiglione in [AP].

Sia t un tempo artificiale e supponiamo di avere al tempo iniziale $t = 0$ la famiglia composta da N_0 palle di \mathbb{R}^n a due a due disgiunte

$$\mathcal{B}(0) = \left\{ B_{r_1^0}(x_1^0), \dots, B_{r_{N_0}^0}(x_{N_0}^0) \right\}.$$

Lo zero posto all'apice sta a indicare che siamo al passo zero dell'algoritmo. L'algoritmo consiste di due fasi alternate:

Espansione. Con lo scorrere del tempo t lasciamo che le palle di $\mathcal{B}(0)$ espandano senza modificare i centri (si veda la Figura 4.7). Se $r_i^0(t)$ è il raggio della i -esima palla al tempo t , richiediamo che l'espansione sia lineare, ovvero che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{r_i^0(t)}{r_i^0} = 1 + t, \text{ per ogni } t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_0 \quad (4.42)$$

in modo che per $t = 0$ si abbia $r_i^0(0) = r_i^0$ raggio iniziale. La famiglia di palle al tempo t viene denotata con

$$\mathcal{B}(t) = \left\{ B_{r_1^0(t)}(x_1^0), \dots, B_{r_{N_0}^0(t)}(x_{N_0}^0) \right\}.$$

Merging. La fase di espansione si arresta nell'istante T_1 in cui per la prima volta le frontiere di una qualsiasi coppia di palle vengono a contatto:

$$T_1 = \inf \left\{ t > 0 \mid \overline{B_{r_i^0(t)}(x_i^0)} \cap \overline{B_{r_j^0(t)}(x_j^0)} \neq \emptyset \text{ per qualche } i \neq j \right\}.$$

Comincia ora la fase di merging: se due palle $B_i, B_j \in \mathcal{B}(t)$ sono tali che $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j \neq \emptyset$ le sostituiamo con una nuova palla B di raggio non troppo grande che le contenga entrambe. Nel caso in cui la chiusura di B intersechi la chiusura

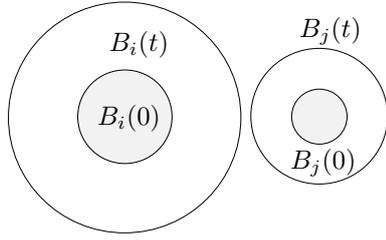


Figura 4.7: Espansione

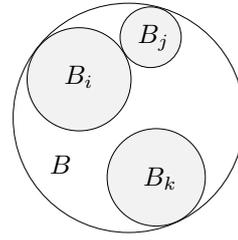


Figura 4.8: Merging

di un'altra palla $B_k \in \mathcal{B}(t)$ allarghiamo ulteriormente B in modo che contenga anche B_k (si veda la Figura 4.8). Procedendo in questo modo otteniamo una palla B che non interseca altre palle di $\mathcal{B}(t)$. Formalmente, alla famiglia di palle

$$\mathcal{B}(T_1) = \left\{ B_{r_1^0(T_1)}(x_1^0), \dots, B_{r_{N_0}^0(T_1)}(x_{N_0}^0) \right\}$$

sostituiamo la nuova famiglia

$$\left\{ B_{r_1^1(T_1)}(x_1^1), \dots, B_{r_{N_1}^1(T_1)}(x_{N_1}^1) \right\}$$

in modo che siano verificate:

1. se la frontiera della palla $B_{r_i^0(T_1)}(x_i^0)$ non interseca la frontiera di nessuna altra palla, viene inserita nella nuova collezione $\mathcal{B}(T_1)$ senza modifiche: si pone $B_{r_i^1(T_1)}(x_i^1) = B_{r_i^0(T_1)}(x_i^0)$
2. se due palle sono tali che $B_{r_i^0(T_1)}(x_i^0) \cap B_{r_j^0(T_1)}(x_j^0) \neq \emptyset$, le sostituiamo con una palla $B_{r_k^1(T_1)}(x_k^1)$ che le contenga. Se la chiusura della nuova palla $B_{r_k^1(T_1)}(x_k^1)$ interseca la chiusura di qualche palla $B_{r_s^0(T_1)}(x_s^0) \in \mathcal{B}(T_1)$ allarghiamo ulteriormente $B_{r_k^1(T_1)}(x_k^1)$ in modo che contenga anche $B_{r_s^0(T_1)}(x_s^0)$, che viene eliminata da $\mathcal{B}(T_1)$. Richiediamo inoltre che il raggio di $B_{r_k^1(T_1)}(x_k^1)$ sia inferiore alla somma dei raggi delle palle che contiene della collezione prima del merging: in formule deve valere

$$r_k^1(T_1) \leq \sum_{j \in M_k} r_j^0(T_1) \quad (4.43)$$

dove $M_k = \{j : B_{r_j^0(T_1)}(x_j^0) \subseteq B_{r_k^1(T_1)}(x_k^1)\}$.

Osserviamo che il numero di palle della famiglia $\mathcal{B}(T_1)$ è $N_1 < N_0$. Si procede ora con una nuova fase di espansione a partire dal tempo T_1 , con la richiesta che la crescita dei raggi sia lineare nel tempo

$$\frac{r_i^1(t)}{r_i^1(T_1)} = \frac{1+t}{1+T_1}, \quad \text{per ogni } t \geq T_1, i = 1, \dots, N_1. \quad (4.44)$$

La fase di espansione procede fino al tempo

$$T_2 = \inf \left\{ t > 0 \mid \overline{B_{r_i^1(t)}(x_i^1)} \cap \overline{B_{r_j^1(t)}(x_j^1)} \neq \emptyset \text{ per qualche } i \neq j \right\}$$

dopo il quale si ha la fase di merging che ci restituirà la collezione $B(T_2)$ composta da N_2 palle, con $N_2 < N_1$. Iterando fasi di espansione e fasi di merging successive, dopo un numero finito di passi si arriva al tempo T_M in cui la collezione $B(T_M)$ contiene una sola palla, che quindi continuerà a espandersi per ogni tempo $t \geq T_M$, ponendo fine alla ball construction.

Per fissare le notazioni riassumiamo l'algoritmo nella seguente Proposizione.

Proposizione 4.10 (Ball construction). *Data una collezione di palle di \mathbb{R}^n a due a due disgiunte*

$$\mathcal{B}(0) = \left\{ B_{r_1^0}(x_1^0), \dots, B_{r_{N_0}^0}(x_{N_0}^0) \right\}$$

esiste una successione crescente di tempi finiti T_1, \dots, T_M detti tempi di merging, definiti come sopra. Si pone $T_0 = 0$ e $T_{M+1} = +\infty$. Dato un tempo $t > 0$ tra i due tempi di merging successivi T_i e T_{i+1} e detta

$$\mathcal{B}(t) = \left\{ B_{r_1^i(t)}(x_1^i), \dots, B_{r_{N_i}^i(t)}(x_{N_i}^i) \right\}$$

la collezione di palle al tempo t , valgono le condizioni sui raggi

$$\frac{r_j^i(t)}{r_j^i(T_i)} = \frac{1+t}{1+T_i}, \text{ per ogni } j = 1, \dots, N_i, \quad (4.45)$$

$$r_j^i(T_i) \leq \sum_{k \in M_j^i} r_k^{i-1}(T_i), \text{ per ogni } j = 1, \dots, N_i, \quad (4.46)$$

con $M_j^i = \left\{ k : B_{r_k^{i-1}(T_i)}(x_k^{i-1}) \subseteq B_{r_j^i(T_i)}(x_j^i), 1 \leq k \leq N_{i-1} \right\}$.

Le condizioni di crescita (4.45) e (4.46) ci permettono di stimare la somma dei raggi delle palle di $\mathcal{B}(t)$ in funzione del tempo e della somma dei raggi della famiglia iniziale $\mathcal{B}(0)$.

Proposizione 4.11 (Stima dei raggi). *Nelle ipotesi della Proposizione 4.10 al tempo $t > 0$ compreso tra i due tempi di merging T_i e T_{i+1} , per qualche $i \in \{0, \dots, M\}$, vale la stima dei raggi*

$$\sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(t) \leq (1+t) \sum_{j=1}^{N_0} r_j^0. \quad (4.47)$$

Dimostrazione. Per la (4.45) possiamo tornare dal tempo t al tempo di merging T_i ,

$$\sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(t) = \frac{1+t}{1+T_i} \sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(T_i)$$

e utilizzando la (4.46) possiamo stimare i raggi al tempo di merging T_i con i raggi della collezione che avevamo prima del merging:

$$\sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(T_i) \leq \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k \in M_j^i} r_k^{i-1}(T_i) = \sum_{j=1}^{N_{i-1}} r_j^{i-1}(T_i).$$

Vale l'ultima uguaglianza perché l'insieme di indici M_j^i contiene solo l'indice j se sulla palla $B_{r_j^i(T_i)}(x_j^i)$ non si è fatto il merging, per cui $M_1^i, \dots, M_{N_i}^i$ formano una partizione di $\{1, \dots, N_{i-1}\}$. Di nuovo per la (4.45) otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(t) &= \frac{1+t}{1+T_i} \sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(T_i) \leq \frac{1+t}{1+T_i} \sum_{j=1}^{N_{i-1}} r_j^{i-1}(T_i) \\ &\stackrel{(4.45)}{=} \frac{1+t}{1+T_i} \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} \sum_{j=1}^{N_{i-1}} r_j^{i-1}(T_{i-1}) \\ &= \frac{1+t}{1+T_{i-1}} \sum_{j=1}^{N_{i-1}} r_j^{i-1}(T_{i-1}) \end{aligned}$$

Applicando ricorsivamente la stima appena ottenuta a $\sum_{j=1}^{N_{i-1}} r_j^{i-1}(T_{i-1})$ si ha

$$\sum_{j=1}^{N_i} r_j^i(t) \leq \frac{1+t}{1+T_0} \sum_{j=1}^{N_0} r_j^0(T_0)$$

che è esattamente la (4.47), essendo $T_0 = 0$ e $r_j^0(T_0) = r_j^0$. \square

4.5 Stima dal basso dell'energia

Adattiamo la ball construction del precedente Paragrafo al nostro caso. Sia $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ e indichiamo i punti del suo supporto con $\text{supp } \mu = \{x_1^0, \dots, x_{N_0}^0\}$. La famiglia di palle al tempo $t = 0$ è

$$\mathcal{B}(0) = \left\{ B_{r_1^0}(x_1^0), \dots, B_{r_{N_0}^0}(x_{N_0}^0) \right\}$$

con raggi $r_i^0 = \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, N_0$. Le palle di $\mathcal{B}(0)$ sono a due a due disgiunte e contenute in Ω perché $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Sia $\mathcal{B}(t)$ la famiglia ottenuta applicando la ball construction a $\mathcal{B}(0)$.

Teorema 4.12 (Stima dal basso dell'energia). *Sia $B \in \mathcal{B}(t)$ e definiamo l'energia ristretta a B come*

$$E_\varepsilon(\mu; B) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B} |\nabla u_\varepsilon|^2. \quad (4.48)$$

Vale la stima

$$E_\varepsilon(\mu; B) \geq \pi |\mu(B)| |\log(1+t)| \quad (4.49)$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(t)$ tale che $B \subset \Omega$.

Dimostrazione. Sia T_i il primo tempo di merging prima dell'istante t . Indichiamo con B_{T_i} la palla subito dopo la merging al tempo T_i la cui espansione al tempo t coincide con B . Se r è il raggio di B ed $r(T_i)$ è il raggio di B_{T_i} per costruzione (si veda (4.45)) si ha

$$\frac{r}{r(T_i)} = \frac{1+t}{1+T_i}. \quad (4.50)$$

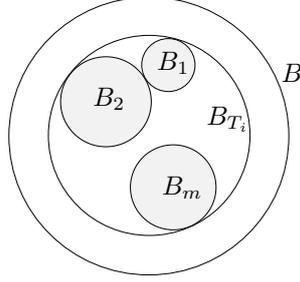


Figura 4.9

Indichiamo con B_1, \dots, B_m le palle contenute in B_{T_i} prima della merging avvenuta al tempo T_i (si veda la Figura 4.9). Per costruzione l'anello $B \setminus B_{T_i}$ non contiene punti del supporto di μ ed è contenuto in Ω_ε . Procedendo come nel Teorema 1.54 (prima per funzioni regolari utilizzando la disuguaglianza di Jensen e poi per densità) è facile dimostrare che

$$\frac{1}{2} \int_{B \setminus B_{T_i}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \pi |\deg(u_\varepsilon; \partial B)| \log \frac{r}{r(T_i)} \stackrel{(4.50)}{=} \pi |\mu(B)| \log \frac{1+t}{1+T_i} \quad (4.51)$$

dove $\deg(u_\varepsilon; \partial B) = \mu(B)$ per invarianza omotopica del grado e perché le uniche singolarità contenute in B sono pari a $\mu(B)$. Dunque

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\mu; B) &= \frac{1}{2} \int_{B \setminus B_{T_i}} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_{T_i}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \\ &\geq \pi |\mu(B)| \log \frac{1+t}{1+T_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j} |\nabla u_\varepsilon|^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Resta da stimare l'energia contenuta nelle palle B_1, \dots, B_m . Se $B_j(T_{i-1})$ è la palla contenuta in B_j al tempo di merging T_{i-1} abbiamo che

$$\frac{1}{2} \int_{B_j \setminus B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \pi |\mu(B_j)| \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \frac{1}{2} \int_{B_j \setminus B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2 \\ &\geq \pi |\mu(B_j)| \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2. \end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j} |\nabla u_\varepsilon|^2 &\geq \pi \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} \sum_{j=1}^m |\mu(B_j)| + \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2. \end{aligned}$$

Notando che

$$\sum_{j=1}^m |\mu(B_j)| \geq \left| \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \right| = |\mu(B)|$$

si ottiene

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j} |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \pi |\mu(B)| \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2$$

che sostituita in (4.52) dà

$$E_\varepsilon(\mu; B) \geq \pi |\mu(B)| \left(\log \frac{1+t}{1+T_i} + \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} \right) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu) \cap B_j(T_{i-1})} |\nabla u_\varepsilon|^2 \quad (4.53)$$

Procedendo a ritroso fino al tempo $T_0 = 0$ dalla (4.53) otteniamo la tesi

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\mu; B) &\geq \pi |\mu(B)| \left(\log \frac{1+t}{1+T_i} + \log \frac{1+T_i}{1+T_{i-1}} + \dots + \log \frac{1+T_1}{1+T_0} \right) \\ &= \pi |\mu(B)| \log(1+t). \end{aligned}$$

□

4.6 Equicoercività e disuguaglianza di Γ -lim inf

Siamo pronti a dimostrare il risultato di equicoercività nel Teorema 4.6. Ricordiamo l'enunciato:

Teorema 4.13. *Sia $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ tale che*

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.54)$$

per qualche $C \geq 0$. Allora esistono una sottosuccessione μ_{n_k} ed una $\mu \in X(\Omega)$ tali che $\mu_{n_k} \xrightarrow{flat} \mu$.

Come abbiamo visto nel controesempio dei dipoli a pagina 76 la condizione (4.54) non ci assicura la limitatezza in variazione totale della successione μ_n . Nel caso del controesempio si aveva infatti il regime

$$\|\mu_n\| = 2 \lfloor \log \varepsilon_n \rfloor.$$

In effetti, questo comportamento è il peggiore che possiamo avere quando vale la limitazione (4.54):

Lemma 4.14. *Sia $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ tale che valga (4.54). Allora*

$$\|\mu_n\| \leq M \lfloor \log \varepsilon_n \rfloor$$

per qualche $M \geq 0$ indipendente da n .

Dimostrazione. La (4.54) ci dice che

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C |\log \varepsilon_n| \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.55)$$

e quindi in particolare $\mu_n \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$, altrimenti $E_{\varepsilon_n}(\mu_n) = +\infty$. La stima (4.39) applicata ad u_{ε_n} restituisce

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n) \geq \pi \|\mu_n\| \log 2$$

che insieme alla (4.55) fornisce

$$\|\mu_n\| \leq \frac{C}{\pi \log 2} |\log \varepsilon_n|$$

che è la tesi. \square

Dimostrazione del Teorema 4.13. Assumiamo che valga (4.54). Denotiamo il supporto di $\mu_n \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$ come

$$\text{supp}(\mu_n) = \{x_{1,n}^0, \dots, x_{N_n^0,n}^0\}$$

e consideriamo la famiglia iniziale di palle

$$\mathcal{B}_n(0) = \{B_{\varepsilon_n}(x_{1,n}^0), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_{N_n^0,n}^0)\}.$$

Lasciamo evolvere questa famiglia secondo la ball construction fino ad un certo tempo $t_{\varepsilon_n} \in [T_i, T_{i+1}]$ tale che, se

$$\mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n}) = \left\{ B_{r_{1,n}^i(t_{\varepsilon_n})}(x_{1,n}^i), \dots, B_{r_{N_n^i,n}^i(t_{\varepsilon_n})}(x_{N_n^i,n}^i) \right\}$$

valga la stima sui raggi

$$\sum_{j=1}^{N_n^i} r_{j,n}^i(t_{\varepsilon_n}) \leq \sqrt{\varepsilon_n}. \quad (4.56)$$

La (4.56) è vera per la stima dei raggi (4.47) pur di scegliere opportunamente t_{ε_n} :

$$\sum_{j=1}^{N_n^i} r_{j,n}^i(t_{\varepsilon_n}) \leq (1 + t_{\varepsilon_n}) \sum_{j=1}^{N_n^0} r_{j,n}^0 = (1 + t_{\varepsilon_n}) \varepsilon_n N_n^0 \leq (1 + t_{\varepsilon_n}) \varepsilon_n \|\mu_n\|$$

visto che $r_{j,n}^0 = \varepsilon_n$ per ogni $j = 1, \dots, N_n^0$ e che $N_n^0 \leq \|\mu_n\|$. Quindi scegliendo

$$t_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n} \|\mu_n\|} - 1 \quad (4.57)$$

otteniamo la (4.56). Consideriamo le palle di $\mathcal{B}_n(t)$ che sono contenute in Ω

$$\mathcal{C}_n(t) = \{B \in \mathcal{B}_n(t) : B \subseteq \Omega\}$$

e quelle che intersecano $\partial\Omega$

$$\mathcal{D}_n(t) = \{B \in \mathcal{B}_n(t) : B \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$$

in modo che $\mathcal{B}_n(t) = \mathcal{C}_n(t) \cup \mathcal{D}_n(t)$. Sia $B \in \mathcal{B}_n(t)$ e definiamo

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon_n} \cap B} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2$$

Se $B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})$ per la stima dal basso (4.49) vale

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) \geq \pi |\mu_n(B)| \log(1 + t_{\varepsilon_n}) = \pi |\mu_n(B)| \log\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n} \|\mu_n\|}\right) \quad (4.58)$$

Dall'ipotesi (4.54) e dal Lemma 4.14 si ha

$$\|\mu_n\| \leq K |\log \varepsilon_n| \quad (4.59)$$

per qualche costante $K \geq 0$ indipendente da n . Usando la (4.59) nella (4.58) otteniamo

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) &\stackrel{(4.58)}{\geq} \pi |\mu_n(B)| \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon_n} - \log \|\mu_n\| \right) \\ &\stackrel{(4.59)}{\geq} \pi |\mu_n(B)| \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon_n} - \log K - \log \log \frac{1}{\varepsilon_n} \right). \end{aligned}$$

L'ordine di infinito dominante nell'ultima disuguaglianza è $\frac{1}{2} |\log \varepsilon_n|$, dunque per ogni costante $M < \frac{1}{2}$ si ha

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) \geq \pi M |\mu_n(B)| |\log \varepsilon_n| \quad \text{definitivamente in } n. \quad (4.60)$$

Questa stima ci dice che sulle palle di $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})$ c'è una energia comparabile con l'energia totale, avendo assunto la (4.54).

Introduciamo ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ una nuova misura inserendo una massa di Dirac al centro delle palle di $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})$:

$$\nu_n = \sum_{B_r(x) \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \mu_n(B_r(x)) \delta_x.$$

Nel caso in cui si avesse $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n}) = \emptyset$ poniamo $\nu_n = 0$. Tutto quello che diremo fino alla fine della dimostrazione vale in entrambi i casi.

Se dimostriamo che esistono due costanti $C_1, C_2 \geq 0$ tali che

$$\|\nu_n\| \leq C_1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.61)$$

e

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{\text{flat}} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon_n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.62)$$

abbiamo concluso. Infatti dalla (4.61), per la Proposizione 4.4, abbiamo che $\nu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ (a meno di estratte) per qualche $\mu \in X(\Omega)$. Dalla (4.62) segue quindi che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ da cui la tesi.

Proviamo la (4.61). Utilizzando la (4.60) si ha

$$\begin{aligned} \|\nu_n\| &= \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} |\mu_n(B)| \stackrel{(4.60)}{\leq} \frac{1}{\pi M |\log \varepsilon_n|} \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) \\ &\leq \frac{1}{\pi M |\log \varepsilon_n|} E_{\varepsilon_n}(\mu_n) = \frac{1}{\pi M} F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \end{aligned} \quad (4.63)$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che le palle di $\mathcal{C}_n(t)$ sono a due a due disgiunte. La (4.63) prova la (4.61) avendo assunto $F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C$.

Proviamo infine la (4.62). Sia $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$, allora

$$\begin{aligned} (\mu_n - \nu_n)(f) &= \int_{\Omega} f d(\mu_n - \nu_n) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) + \sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) \end{aligned} \quad (4.64)$$

essendo il supporto delle misure μ_n e ν_n contenuto nelle palle della famiglia $\mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n})$ per definizione ed essendo $\mathcal{B}_n(t) = \mathcal{C}_n(t) \dot{\cup} \mathcal{D}_n(t)$. Vogliamo stimare il primo addendo nella (4.64). Osserviamo che se $c \in \mathbb{R}$ è una costante si ha

$$\int_B c d(\mu_n - \nu_n) = c(\mu_n(B) - \nu_n(B)) = 0$$

essendo per definizione $\mu_n(B) = \nu_n(B)$ per $B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})$. Se indichiamo la media di f su B con

$$f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f dx$$

si ha

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) &= \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B (f - f_B) d(\mu_n - \nu_n) \\ &\leq \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \sup_B |f - f_B| [|\mu_n|(B) + |\nu_n|(B)]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Per il Teorema della media integrale la funzione $f - f_B$ si annulla in almeno un punto $y \in B$, dunque

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B} |(f - f_B)(x)| &= \sup_{x \in B} |(f - f_B)(x) - (f - f_B)(y)| \\ &\leq \|f - f_B\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sup_{x \in B} |x - y| \\ &\leq \|f - f_B\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \text{diam}(B) \\ &\leq 2 \|f - f_B\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sqrt{\varepsilon_n} \\ &\leq 2 \left(\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} + 1 \right) \sqrt{\varepsilon_n} \end{aligned} \quad (4.66)$$

poiché $B \in \mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n})$ ha la proprietà di avere raggio non superiore a $\sqrt{\varepsilon_n}$ per la (4.56), dunque $\text{diam}(B) \leq 2\sqrt{\varepsilon_n}$. Per definizione di variazione totale di una misura abbiamo poi

$$\sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} [|\mu_n|(B) + |\nu_n|(B)] \leq \|\mu_n\| + \|\nu_n\| \leq K |\log \varepsilon_n| + C_1 \quad (4.67)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per la (4.61) e per la (4.59). Inserendo la (4.66) e la (4.67) nella (4.65) otteniamo

$$\sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) \leq 2\sqrt{\varepsilon_n} \left(\|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} + 1 \right) (K |\log \varepsilon_n| + C_1) \quad (4.68)$$

che tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$. Stimiamo ora il secondo addendo nella (4.64). Per definizione di μ_n se $B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})$ abbiamo $\nu_n(B) = 0$, quindi

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) &= \sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d\mu_n \\ &\leq \sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} \left(\max_B |f| \right) |\mu_n|(B). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Se $B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})$ esiste un qualche $y \in B \cap \partial\Omega$ e quindi poiché f è nulla su $\partial\Omega$ si ha

$$\begin{aligned} \max_{x \in B} |f(x)| &= \max_{x \in B} |f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \sup_{x \in B} |x - y| \\ &\leq \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)} \text{diam}(B) \leq 2\sqrt{\varepsilon_n} \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Inoltre per definizione di variazione totale e per la (4.59) vale

$$\sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} |\mu_n|(B) \leq \|\mu_n\| \leq K |\log \varepsilon_n|. \quad (4.71)$$

Sostituendo la (4.70) e la (4.71) nella (4.69) si ottiene

$$\sum_{B \in \mathcal{D}_n(t_{\varepsilon_n})} \int_B f d(\mu_n - \nu_n) \leq 2K\sqrt{\varepsilon_n} |\log \varepsilon_n| \|f\|_{\text{Lip}_0(\Omega)}. \quad (4.72)$$

Sostituendo le (4.68) e (4.72) nella (4.64) si ha

$$(\mu_n - \nu_n)(f) \leq 2\sqrt{\varepsilon_n} \left(\|f\|_{\text{Lip}_0} + 1 \right) (K |\log \varepsilon_n| + C_1) + 2K\sqrt{\varepsilon_n} |\log \varepsilon_n| \|f\|_{\text{Lip}_0}$$

e passando all'estremo superiore sulle $f \in \text{Lip}_0(\Omega)$ con $\|f\|_{\text{Lip}_0} \leq 1$ otteniamo la (4.62). \square

Procediamo infine alla dimostrazione della disuguaglianza di Γ -lim inf. Per comodità del lettore ricordiamo l'enunciato:

Teorema 4.15. *Sia $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ con $\mu \in X(\Omega)$. Allora*

$$F(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n).$$

Notiamo che la stima (4.60)

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) \geq \pi M |\mu_n(B)| |\log \varepsilon_n|$$

ci darebbe la disuguaglianza di Γ -lim inf se la costante M fosse uguale ad 1. Cerchiamo quindi di ottenere una analoga stima nell'ipotesi $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$.

Dimostrazione. Passo 1. Poniamo $C := F(\mu)$ e assumiamo per il momento che valga la condizione di equilimitatezza

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (4.73)$$

In questo modo $\mu_n \in A_{\varepsilon_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo anche che dal Lemma 4.14 esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\|\mu_n\| \leq M |\log \varepsilon_n| \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (4.74)$$

Procediamo come nella dimostrazione dell'equicoercività. Denotiamo il supporto di μ_n con

$$\text{supp}(\mu_n) = \{x_{1,n}^0, \dots, x_{N_n^0,n}^0\}$$

e consideriamo la famiglia iniziale di palle

$$\mathcal{B}_n(0) = \{B_{\varepsilon_n}(x_{1,n}^0), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_{N_n^0,n}^0)\}.$$

Lasciamo evolvere questa famiglia secondo la ball construction fino ad un certo tempo $t_{\varepsilon_n} \in [T_i, T_{i+1}]$ che scegliamo come

$$t_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n^\theta \|\mu_n\|} - 1 \quad (4.75)$$

dove $\theta \in (0, 1)$ è fissato e sarà scelto in modo opportuno nel seguito. Indichiamo con

$$\mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n}) = \left\{ B_{r_{1,n}^i(t_{\varepsilon_n})}(x_{1,n}^i), \dots, B_{r_{N_n^i,n}^i(t_{\varepsilon_n})}(x_{N_n^i,n}^i) \right\}$$

la famiglia al tempo t_{ε_n} . Come nella precedente dimostrazione vale la stima dei raggi

$$\sum_{j=1}^{N_n^i} r_{j,n}^i(t_{\varepsilon_n}) \leq \varepsilon_n^{(1-\theta)} \quad (4.76)$$

perché

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_n^i} r_{j,n}^i(t_{\varepsilon_n}) &\stackrel{(4.47)}{\leq} (1 + t_{\varepsilon_n}) \sum_{j=1}^{N_n^0} r_{j,n}^0 = (1 + t_{\varepsilon_n}) \varepsilon_n N_n^0 \\ &\leq (1 + t_{\varepsilon_n}) \varepsilon_n \|\mu_n\| \stackrel{(4.75)}{=} \varepsilon_n^{(1-\theta)} \end{aligned}$$

visto che $r_{j,n}^0 = \varepsilon_n$ per ogni $j = 1, \dots, N_n^0$ e che $N_n^0 \leq \|\mu_n\|$.

Come nella precedente dimostrazione sia

$$\mathcal{C}_n(t) = \{B \in \mathcal{B}_n(t) : B \subseteq \Omega\}$$

e introduciamo la misura

$$\nu_n = \sum_{B_r(x) \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} |\mu_n(B_r(x))| \delta_x$$

ponendo $\nu_n = 0$ se $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n}) = \emptyset$. In questo modo

$$\|\nu_n\| = \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} |\mu_n(B)| \quad (4.77)$$

e

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{\text{flat}} \leq C_1 \varepsilon_n^{(1-\theta)} \quad (4.78)$$

per qualche costante $C_1 \geq 0$ indipendente da n . Si noti che questa stima vale anche nel caso in cui $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n}) = \emptyset$ e quindi $\nu_n = 0$. Infatti, visto che vale la condizione di equilimitatezza (4.73), per provare la (4.78) è sufficiente

ripercorrere i passaggi fatti nella dimostrazione precedente per provare la (4.62), notando che se $B \in \mathcal{B}_n(t_{\varepsilon_n})$ abbiamo che

$$\text{diam}(B) \leq 2\varepsilon_n^{(1-\theta)}$$

per la stima sui raggi (4.76).

Possiamo supporre che $\mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n}) \neq \emptyset$ definitivamente. Infatti, se non valesse definitivamente, esisterebbe una sottosuccessione tale che

$$\mathcal{C}_{n_k}(t_{\varepsilon_{n_k}}) = \emptyset \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Quindi lungo questa sottosuccessione $\nu_{n_k} = 0$ e per la (4.78)

$$\|\mu_{n_k}\|_{\text{flat}} \leq C_1 \varepsilon_{n_k}^{(1-\theta)} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

ovvero $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{flat}} 0$. Ma per ipotesi $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$, da cui $\mu = 0$ e in questo caso la disuguaglianza di Γ -lim inf è banale.

Sia quindi $B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})$. Per la stima (4.49) e per come abbiamo scelto t_{ε_n} abbiamo

$$E_\varepsilon(\mu_n; B) \geq \pi |\mu_n(B)| \log(1 + t_{\varepsilon_n}) \stackrel{(4.75)}{=} \pi |\mu_n(B)| (\theta |\log \varepsilon_n| - \log \|\mu_n\|)$$

e quindi per la (4.74)

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n; B) \geq \pi |\mu_n(B)| (\theta |\log \varepsilon_n| - \log M - \log |\log \varepsilon_n|) \quad (4.79)$$

Visto che in (4.79) l'ordine di infinito dominante è $\theta |\log \varepsilon_n|$, per ogni $\tilde{\theta} < \theta$ vale la stima

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n; B) \geq \pi \tilde{\theta} |\log \varepsilon_n| |\mu_n(B)|. \quad (4.80)$$

Quindi l'energia totale si stima dal basso con

$$E_{\varepsilon_n}(\mu_n) \geq \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} E_{\varepsilon_n}(\mu_n, B) \stackrel{(4.80)}{\geq} \pi \tilde{\theta} |\log \varepsilon_n| \sum_{B \in \mathcal{C}_n(t_{\varepsilon_n})} |\mu_n(B)|$$

Ricordando la (4.77) e dividendo per $|\log \varepsilon_n|$ si ha

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \geq \pi \tilde{\theta} \|\nu_n\|. \quad (4.81)$$

Visto che $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ e che vale la (4.78), anche $\nu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$. Per la debole semicontinuità inferiore della variazione totale rispetto alla convergenza flat (Teorema 4.5), passando al limite inferiore in (4.81) si ottiene

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \geq \pi \tilde{\theta} \|\mu\| = \tilde{\theta} F(\mu). \quad (4.82)$$

Dal momento che la (4.82) vale per ogni $\tilde{\theta} < \theta$ e per ogni $\theta \in (0, 1)$, segue la disuguaglianza di Γ -lim inf.

Passo 2. Poniamo di nuovo $C = F(\mu)$. Dobbiamo dimostrare che

$$C \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \quad (4.83)$$

Se per assurdo non valesse la (4.83) allora esisterebbe una sottosuccessione $\{\mu_{n_k}\}$ tale che

$$F_{\varepsilon_{n_k}}(\mu_{n_k}) < C \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \quad (4.84)$$

Ma questa è esattamente la condizione di equilimitatezza (4.73) per cui essendo $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{flat}} \mu$, dal passo precedente segue la disuguaglianza

$$C \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(\mu_{n_k})$$

che è in contrasto con la (4.84). \square

4.7 Risultato di Γ -convergenza con dato al bordo

Vogliamo ora dare il risultato di Γ -convergenza con il dato al bordo. Ricordiamo brevemente quali sono gli elementi del problema. Viene assegnato un dato al bordo $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ regolare con grado $d > 0$. Definiamo l'insieme di singolarità

$$X(\bar{\Omega}) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} : N \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \bar{\Omega} \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}$$

e quello delle singolarità ammissibili per $\varepsilon > 0$ fissato

$$\mathcal{A}_\varepsilon^g = \left\{ \mu \in X(\bar{\Omega}) : \sum_{i=1}^N d_i = d, |x_i - x_j| > 4\varepsilon, \text{dist}(x_i, \partial\Omega) > 2\varepsilon, 1 \leq i \neq j \leq N \right\}.$$

Se $\mu \in X(\bar{\Omega})$, denotiamo con $N = |\text{supp } \mu|$, $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $d_i = \mu(\{x_i\})$. Sia $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$ con $B_i := B_\varepsilon(x_i)$ ed

$$\mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu) := \left\{ u \in H_g^1(\Omega_\varepsilon(\mu); S^1) : \deg(u; \partial B_i) = d_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Indichiamo con $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mu) \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)$ l'unica funzione di $\mathcal{U}_\varepsilon^g$ tale che

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u|^2$$

e definiamo il funzionale energia $E_\varepsilon^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{se } \mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.85)$$

Introduciamo i funzionali riscaldati $F_\varepsilon^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da

$$F_\varepsilon^g(\mu) = \frac{E_\varepsilon^g(\mu)}{\log(\varepsilon^{-1})}, \quad \mu \in X(\bar{\Omega})$$

e il loro Γ -limite $F^g: X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F^g(\mu) = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^N |d_i| = \pi \|\mu\| & \text{se } \sum_{i=1}^N d_i = d \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sull'insieme $X(\bar{\Omega})$ mettiamo la topologia di $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$:

Definizione 4.16. Se $\mu \in X(\bar{\Omega})$ definiamo

$$\|\mu\|_{\text{Lip}^*} := \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| : f \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) \text{ con } \|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \leq 1 \right\}$$

dove

$$\|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} := \max \left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|, \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \right\}$$

è una norma su $\text{Lip}(\bar{\Omega})$. Diciamo che $\{\mu_n\} \subset X(\bar{\Omega})$ converge a μ in $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$, in simboli $\mu_n \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$ se $\|\mu_n - \mu\|_{\text{Lip}^*} \rightarrow 0$.

Calcoliamo la norma Lip^* di alcune misure in $X(\bar{\Omega})$.

Proposizione 4.17. *Valgono le seguenti:*

1. $\|\delta_x\|_{\text{Lip}^*} = 1$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$;
2. se $x_1, \dots, x_N \in \bar{\Omega}$ e $\mu = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ si ha

$$\|\mu\|_{\text{Lip}^*} = N;$$

3. se $D = \delta_x - \delta_y$ è un dipolo con $x, y \in \bar{\Omega}$ allora

$$\|D\|_{\text{Lip}^*} = \min\{|x - y|, 2\}.$$

Dimostrazione. 1. Se $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ abbiamo

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \sup_{\bar{\Omega}} |f| \leq \|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \quad (4.86)$$

per cui prendendo il sup sulle f con $\|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \leq 1$ si ha

$$\|\delta_x\|_{\text{Lip}^*} \leq 1. \quad (4.87)$$

Se ora consideriamo $f \equiv 1$ si ha che $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e $\|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} = 1$, dunque vale l'uguaglianza in (4.86) da cui segue che anche in (4.87) vale l'uguale.

2. Basta usare la disuguaglianza triangolare e poi applicare il passo precedente.

3. Se $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ si ha

$$|D(f)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} |x - y|$$

e prendendo l'estremo superiore sulle f con $\|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \leq 1$ si ha

$$\|D\|_{\text{Lip}^*} \leq |x - y|. \quad (4.88)$$

Analogamente vale

$$|D(f)| = |f(x) - f(y)| \leq 2 \sup_{\bar{\Omega}} |f| \leq 2 \|f\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})}$$

e quindi

$$\|D\|_{\text{Lip}^*} \leq 2$$

che insieme alla (4.88) dà

$$\|D\|_{\text{Lip}^*} \leq \min\{|x-y|, 2\}. \quad (4.89)$$

Per provare che la (4.89) vale con l'uguale, distinguiamo due casi.

Nel primo caso supponiamo che

$$|x-y| \leq 2. \quad (4.90)$$

Sia $[x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$ il segmento che connette x ad y . Definiamo la funzione $f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(z) = |z-y|$. In tal modo $f \in \text{Lip}([x, y])$ con norma pari ad 1. Possiamo quindi estenderla ad una $\bar{f} \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ tale che $\|\bar{f}\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} = 1$. Dunque

$$|D(\bar{f})| = |f(x) - f(y)| = |x-y| \stackrel{(4.90)}{=} \min\{|x-y|, 2\}$$

e la (4.89) vale con l'uguale.

Il secondo caso è

$$2 \leq |x-y|. \quad (4.91)$$

Consideriamo la funzione $f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(z(t)) = 2t-1$ per $t \in [0, 1]$. In questo modo $f(x) = -1$, $f(y) = 1$ e $\sup_{[x, y]} |f| = 1$. Inoltre la f ha una variazione di 2 sul segmento $[x, y]$, che per la (4.91) ha lunghezza almeno 2 da cui segue

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in [x, y] \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq 1.$$

Quindi $f \in \text{Lip}([x, y])$ con $\|f\|_{\text{Lip}([x, y])} = 1$. Possiamo allora estendere f a $\bar{f} \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ con $\|\bar{f}\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} = 1$ in modo che

$$|D(\bar{f})| = |f(x) - f(y)| = 2 \stackrel{(4.91)}{=} \min\{|x-y|, 2\}$$

e la (4.89) vale con l'uguale. □

In generale per le misure di $X(\bar{\Omega})$ vale un risultato simile al Teorema 4.3. Introduciamo la famiglia delle somme formali finite di archi contenuti in Ω con molteplicità discreta

$$\mathcal{S}(\Omega) := \left\{ S = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i : n \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \subset \Omega \right\} \quad (4.92)$$

dove $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow \Omega$ è una curva continua. Indichiamo con $l(\alpha_i)$ la lunghezza di α_i . Introduciamo l'operatore di bordo

$$\partial S := \sum_{i=1}^n m_i (\delta_{y_i} - \delta_{x_i})$$

se α_i è una curva tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. La massa di S è definita come

$$|S| := \sum_{i=1}^n |m_i| l(\alpha_i).$$

Teorema 4.18. Sia $\mu \in X(\bar{\Omega})$, allora

$$\|\mu\|_{\text{Lip}^*} = \inf \left\{ \|\nu\| + |S| : \mu = \nu + \partial S, S \in \mathcal{S}(\Omega), \nu = \sum_{i=1}^M d_i \delta_{x_i} \text{ con } d_i > 0 \right\}.$$

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata sul libro di Federer [Fe].

Possiamo dare il risultato di Γ -convergenza:

Teorema 4.19. Si ha che $F_\varepsilon^g \xrightarrow{\Gamma} F^g$ rispetto alla topologia $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$. Nel dettaglio, per ogni fissata una successione $\varepsilon_n \searrow 0$ si ha:

1. (Γ -lim inf) per ogni successione $\{\mu_n\} \subset X(\bar{\Omega})$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$ con $\mu \in X(\bar{\Omega})$ vale

$$F^g(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n);$$

2. (Γ -lim sup) per ogni $\mu \in X(\bar{\Omega})$ esiste una recovery sequence $\{\mu_n\} \subset X(\bar{\Omega})$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$ e

$$F^g(\mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n).$$

Inoltre la famiglia $\{F_\varepsilon\}$ è equicoerciva: se $\{\mu_n\} \subset X(\bar{\Omega})$ è tale che

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

con $C \geq 0$ costante indipendente da n , allora esiste una sottosuccessione $\{\mu_{n_k}\}$ e una $\mu \in X(\bar{\Omega})$ tale che $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$.

Dimostrazione della disuguaglianza di Γ -lim sup. Sia $\mu \in X(\bar{\Omega})$, dunque μ è della forma

$$\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}.$$

Se μ non soddisfa la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^N d_i = d = \deg(g; \partial\Omega) \tag{4.93}$$

per definizione $F_\varepsilon^g(\mu) = +\infty$, per cui come recovery sequence possiamo prendere $\mu_n = \mu$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo quindi che μ soddisfi la (4.93).

Passo 1. Supponiamo dapprima che $\mu \in X(\bar{\Omega})$ sia tale che

$$\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$$

con pesi $d_i = \pm 1$ e punti $x_i \in \Omega$. Possiamo procedere come nel Passo 1 della dimostrazione della disuguaglianza di Γ -lim sup per il Teorema 4.6 di Γ -convergenza senza dato al bordo. Sia

$$R := \min \left\{ \min_i \text{dist}(x_i, \partial\Omega), \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \right\}.$$

Poiché $\varepsilon_n \searrow 0$, a meno di scartare un numero finito di termini, possiamo supporre che $\varepsilon_n < R/4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\text{dist}(x_i, \partial\Omega) > R > 4\varepsilon_n > 2\varepsilon_n \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

e

$$|x_i - x_j| > R > 4\varepsilon_n \quad \text{per } 1 \leq i \neq j \leq N$$

per cui $\mu \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}^g$, visto che vale anche la (4.93). Per definizione si ha

$$F_{\varepsilon_n}^g(\mu) = \min_{v \in \mathcal{U}_{\varepsilon_n}^g(\mu)} \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla v|^2 = \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2$$

dove

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_n}^g(\mu) = \{v \in H_g^1(\Omega_{\varepsilon_n}; S^1) : \deg(v; \partial B_i) = d_i, i = 1, \dots, N\}$$

e

$$\Omega_{\varepsilon_n}(\mu) = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N B_i, \quad B_i = B_{\varepsilon_n}(x_i).$$

Scegliamo come particolare funzione in $\mathcal{U}_{\varepsilon_n}^g(\mu)$ la

$$v_{\varepsilon_n}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}} & \text{se } x \in B_R(x_i) \setminus B_{\varepsilon_n}(x_i) \\ \tilde{v}(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove il prodotto è quello di \mathbb{C} . La funzione $\tilde{v} \in H^1(\Omega_R; S^1)$, con

$$\Omega_R = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N B_R(x_i),$$

è scelta in modo tale che $v_{\varepsilon_n} \in \mathcal{U}_{\varepsilon_n}^g(\mu)$. Essendo $F_{\varepsilon_n}^g(\mu)$ definita come minimo, si ha

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_n}^g(\mu) &\leq \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu)} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \\ &= \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \left[\int_{\Omega_R} |\nabla \tilde{v}|^2 + \sum_{i=1}^N \int_{B_R(x_i) \setminus B_{\varepsilon_n}(x_i)} \left| \nabla \frac{(x - x_i)^{d_i}}{|x - x_i|^{d_i}} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \left[\|\nabla \tilde{v}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + 2\pi N (\log R - \log \varepsilon_n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi N. \end{aligned}$$

Quindi prendendo come *recovery sequence* la successione costante $\mu_n = \mu$ otteniamo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu) \leq \pi N$$

Osservando che $\|\mu\| = N$, essendo i pesi di μ tutti ± 1 , si ha la tesi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n) \leq \pi N = \pi \|\mu\| = F^g(\mu).$$

Prima di procedere al secondo Passo, premettiamo il seguente lemma:

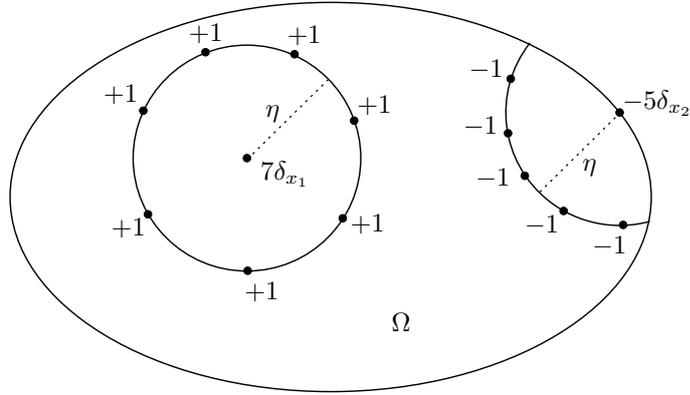


Figura 4.10: Split del vortice $7\delta_{x_1} - 5\delta_{x_2}$

Lemma 4.20 (Split di misure). *Sia $\mu \in X(\bar{\Omega})$ della forma*

$$\mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}.$$

Per ogni $\rho > 0$ fissato esiste una misura $\nu \in X(\bar{\Omega})$ della forma

$$\nu = \sum_{j=1}^M p_j \delta_{y_j}$$

tale che

1. $|p_j| = 1$ per ogni $j = 1, \dots, M$;
2. $\|\mu - \nu\|_{\text{Lip}^*} \leq \rho$;
3. $\|\mu\| = \|\nu\|$;
4. $\sum_{i=1}^M p_i = \sum_{j=1}^N d_j$;
5. $y_j \in \Omega$ per ogni $j = 1, \dots, M$.

Idea della dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma è analoga a quella del Lemma 4.7, con la sola differenza che se il punto $x_i \in \partial\Omega$, il vortice $d_i \delta_{x_i}$ viene diviso in $|d_i|$ vortici di peso $\text{sign}(d_i)$ che sono contenuti in Ω e che hanno distanza più piccola di un η da x_i (si veda per esempio la Figura 4.10). La stima

$$\|\mu - \nu\|_{\text{Lip}^*} \leq \rho$$

si ottiene nello stesso modo della stima con la norma flat del Lemma 4.7, prendendo come funzioni test le $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ invece che quelle in $\text{Lip}_0(\Omega)$. \square

Possiamo procedere alla dimostrazione del secondo passo.

Passo 2. Sia ora $\mu \in X(\bar{\Omega})$ generica, tale che valga (4.93). Come nel passo precedente possiamo supporre che $\mu \in \mathcal{A}_{\frac{\eta}{n}}^g$ definitivamente in n . Per il Lemma 4.20 per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\mu_k \in X(\bar{\Omega})$ tale che

1. $\|\mu_k - \mu\|_{\text{Lip}^*} \leq \frac{1}{k}$;
2. μ_k soddisfa alla condizione di compatibilità (4.93);
3. $\|\mu_k\| = \|\mu\|$, dunque $F^g(\mu_k) = F^g(\mu)$;
4. μ_k ha tutti pesi ± 1 .

Alle μ_k si applica il passo precedente: la successione costante $\mu_k^n = \mu_k$ è una *recovery sequence* per μ_k , cioè è tale che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_k^n) \leq F^g(\mu_k) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

e quindi, poiché $F^g(\mu_k) = F^g(\mu)$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^g(\mu_k) \leq F^g(\mu) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ fissato.} \quad (4.94)$$

Applicando alla (4.94) lo stesso argomento diagonale del Passo 2 della dimostrazione della disuguaglianza di Γ -lim sup del Teorema 4.6, estraiamo da μ_k una *recovery sequence* per μ . \blacksquare

Per la dimostrazione della equicoercività si fa direttamente uso del risultato di Γ -convergenza senza dato al bordo (Teorema 4.6).

Dimostrazione della equicoercività. Supponiamo che lungo la successione μ_n valga la condizione di equilimitatezza

$$F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.95)$$

con $C \geq 0$ costante indipendente da n . Dal momento che vale la (4.95) segue ogni misura μ_n soddisfa alla condizione di compatibilità (4.93). Sia $\tilde{\Omega}$ un aperto limitato semplicemente connesso con frontiera regolare tale che $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Estendiamo il dato al bordo g ad una funzione $\tilde{g} \in H^1(\tilde{\Omega} \setminus \Omega; S^1)$. Possiamo vedere μ_n come misura in $X(\tilde{\Omega})$. Indichiamo con F_{ε} il funzionale senza dato al bordo definito sul dominio $\tilde{\Omega}$. Estendiamo la funzione $u_{\varepsilon_n} = u_{\varepsilon_n}(\mu_n)$ alla funzione

$$v_n = \begin{cases} u_{\varepsilon_n} & \text{in } \Omega_{\varepsilon_n}(\mu_n) \\ \tilde{g} & \text{in } \tilde{\Omega} \setminus \Omega \end{cases}$$

in modo tale che

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_n}(\mu_n) &\leq \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v_n|^2 \\ &= \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}(\mu_n)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + k \\ &= F_{\varepsilon_n}^g(\mu_n) + k \end{aligned}$$

dove

$$k := \frac{1}{2|\log \varepsilon_n|} \int_{\tilde{\Omega} \setminus \Omega} |\nabla \tilde{g}|^2.$$

In questo modo otteniamo

$$F_{\varepsilon_n}(\mu_n) \leq C + k \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

quindi dal Teorema 4.6 esiste una sottosuccessione μ_{n_k} e una misura $\mu \in X(\bar{\Omega})$ tale che

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{flat}} \mu \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \quad (4.96)$$

Dal momento che $\text{supp } \mu_n \subset \bar{\Omega}$ segue che $\mu \in X(\bar{\Omega})$. Da questa informazione e dalla (4.96) segue che $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$. ■

Infine, la disuguaglianza di Γ -lim inf si dimostra in modo analogo alla equicoercività, dal momento che possiamo assumere l'ipotesi di equilimitatezza, come abbiamo fatto nella dimostrazione del Teorema 4.6 di Γ -convergenza senza dato al bordo. Omettiamo la dimostrazione.

4.8 Esistenza dei minimi di F_ε^g ad ε fissato

Per concludere la Tesi, visto che eravamo interessati al comportamento asintotico dei punti di minimo dei funzionali F_ε^g , proviamo che effettivamente questi ultimi ammettono minimo ad ε fissato.

Teorema 4.21. *Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Allora esiste $\mu \in X(\bar{\Omega})$ tale che*

$$F_\varepsilon^g(\mu) = \min_{\nu \in X(\bar{\Omega})} F_\varepsilon^g(\nu).$$

Naturalmente l'esistenza di minimi è un fatto puramente algebrico che non dipende dalla topologia su $X(\bar{\Omega})$. Tuttavia è agevole mettere su $X(\bar{\Omega})$ la topologia della norma flat per provare il risultato di esistenza.

Dimostrazione. Notiamo che è equivalente provare che E_ε^g ammette un punto di minimo. Sia allora

$$m = \inf_{\nu \in X(\bar{\Omega})} E_\varepsilon^g(\nu).$$

Abbiamo che $m \geq 0$ ed $m < +\infty$ perché non appena $\nu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g$ si ha $E_\varepsilon^g(\nu) < +\infty$. Osserviamo anche che se ν ha masse di Dirac su $\partial\Omega$ per definizione si ha $E_\varepsilon^g(\nu) = +\infty$ da cui

$$m = \inf_{\nu \in X(\Omega)} E_\varepsilon^g(\nu)$$

Sia allora $\{\mu_n\} \subset X(\Omega)$ una successione minimizzante, ovvero tale che $E_\varepsilon^g(\mu_n) \rightarrow m$. Dunque

$$E_\varepsilon^g(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.97)$$

a meno di scartare un numero finito di termini. Per la (4.97) si ha quindi che $\{\mu_n\} \subset \mathcal{A}_\varepsilon^g$. Utilizzando la stima sulle corone di raggi ε e 2ε centrate in $\text{supp } \mu_n$ (si veda la (4.39)) abbiamo

$$E_\varepsilon^g(\mu_n) \geq \pi \|\mu_n\| \log 2 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

che insieme alla (4.97) ci dà

$$\|\mu_n\| \leq \frac{C}{\pi \log 2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (4.98)$$

Procediamo ora come nella Proposizione 4.4. Abbiamo che μ_n è della forma

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{N_n} d_{i,n} \delta_{x_{i,n}}.$$

Dalla (4.98) segue che $N_n \leq K$, quindi a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che $N_n = N$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente $|d_{j,n}| \leq K$ e meno di fare N estrazioni successive da μ_n possiamo supporre che $d_{j,n} = d_j$ per qualche $d_j \in \mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi μ_n è della forma

$$\mu_n = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_{i,n}}.$$

Essendo Ω limitato, per ogni j fissato la successione $\{x_{i,n}\} \subset \Omega$ ammette estratta convergente ad un certo $x_i \in \bar{\Omega}$. A meno di fare N estrazioni successive, possiamo supporre che $x_{i,n} \rightarrow x_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Quindi $\mu_n \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ con

$$\mu := \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$$

Proviamo che $\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon^g$. Infatti è compatibile con g perché $\sum_{i=1}^N d_i = d$ e dal fatto che $\{\mu_n\} \subset \mathcal{A}_\varepsilon^g$ si ha

$$\text{dist}(x_{i,n}, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, N$$

e anche

$$|x_{i,n} - x_{j,n}| \geq 4\varepsilon \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \neq j \leq N$$

che passano al limite per $n \rightarrow +\infty$.

Se proviamo che

$$E_\varepsilon^g(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\varepsilon^g(\mu_n) = m \quad (4.99)$$

(a meno di sottosuccessioni) concludiamo che μ realizza il minimo. Indichiamo con $\Omega_n = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_{i,n}$ dove $B_{i,n} = B_\varepsilon(x_{i,n})$ e con $\Omega_\infty = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \bar{B}_i$ dove $B_i = B_\varepsilon(x_i)$. Per il Teorema 3.3 abbiamo che

$$E_\varepsilon^g(\mu) = \min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\infty} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\infty} |\nabla \phi|^2 \quad (4.100)$$

dove ϕ è la soluzione di

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{in } \Omega_\infty \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = g \times g_\tau & \text{su } \partial\Omega \\ \phi = C_i = \text{cost.} & \text{su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial\Omega} \phi = 0 & \end{array} \right. \quad (4.101)$$

e analogamente

$$E_\varepsilon^g(\mu_n) = \min_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon^g(\mu_n)} \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \phi_n|^2 \quad (4.102)$$

con ϕ_n soluzione di

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_n = 0 & \text{in } \Omega_n \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} = g \times g_\tau & \text{su } \partial \Omega \\ \phi_n = C_{i,n} = \text{cost.} & \text{su } \partial B_{i,n} \text{ per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial B_{i,n}} \frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{per } i = 1, \dots, N \\ \int_{\partial \Omega} \phi_n = 0 & \end{array} \right. \quad (4.103)$$

Per il Teorema 4.22 di stabilità (a seguire) della soluzione di (4.101) rispetto a piccole variazioni del dominio abbiamo che (a meno di sottosuccessioni)

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\infty} |\nabla \phi|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \phi_n|^2 \quad (4.104)$$

che insieme alle (4.100) e (4.102) prova la (4.99). \square

Passiamo a dimostrare che il problema (4.101) è stabile per piccole variazioni del dominio. La stabilità è da intendersi nel senso del seguente Teorema:

Teorema 4.22. *Sia ϕ_n la soluzione di (4.103) e ϕ quella di (4.101). Estendiamo ϕ_n ad una funzione definita su tutto Ω ponendo $\phi_n = \phi_n|_{\partial B_{i,n}}$ su $B_{i,n}$. Analogamente poniamo $\phi = \phi|_{\partial B_i}$ su B_i . Si ha che $\phi_n \rightarrow \phi$ in $H^1(\Omega)$. In particolare vale la (4.104).*

Questo Teorema segue da un risultato di Γ -convergenza per i funzionali relativi ai problemi (4.101) e (4.103). Ricordiamo infatti che se

$$V = \left\{ \psi \in H^1(\Omega_\infty) : \psi = \text{const. su } \partial B_i \text{ per } i = 1, \dots, N, \int_{\partial \Omega} \psi = 0 \right\}$$

ed $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ è

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\infty} |\nabla \psi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \psi|_{\partial B_i} - \int_{\partial \Omega} \psi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)$$

allora la soluzione di (4.101) coincide con l'unico punto di minimo di F su V , che indichiamo con ϕ . Una $\psi \in V$ è costante su ∂B_i , dunque possiamo estenderla ad una funzione di $H^1(\Omega)$ ponendo $\psi = \psi|_{\partial B_i}$ su B_i . Indichiamo con $\tilde{\phi}$ l'estensione di ϕ . In questo modo possiamo vedere V come immerso in $H^1(\Omega)$. Estendiamo F ad un funzionale $\tilde{F}: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ponendo

$$\tilde{F}(\psi) = \begin{cases} F(\psi) & \text{se } \psi = \text{const. su } B_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Così facendo si ha che $\tilde{\phi}$ è l'unico punto di minimo di \tilde{F} su V , ovvero

$$F(\phi) = \min_{\psi \in V} F(\Psi) = \min_{\psi \in H^1(\Omega)} \tilde{F}(\Psi) = \tilde{F}(\tilde{\phi}). \quad (4.105)$$

Analogamente definiamo

$$V_n = \left\{ \psi \in H^1(\Omega_n) : \psi = \text{const. su } \partial B_{i,n} \text{ per } i = 1, \dots, N, \int_{\partial\Omega} \psi = 0 \right\}$$

ed $F_n: V_n \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$F_n(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \psi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \psi|_{\partial B_{i,n}} - \int_{\partial\Omega} \psi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)$$

La soluzione di (4.103), che indichiamo con ϕ_n , coincide con l'unico punto di minimo di F_n su V_n . Procedendo come prima possiamo vedere V_n come immerso in $H^1(\Omega)$ ed estendere F_n ad un funzionale $\tilde{F}_n: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che

$$\tilde{F}_n(\psi) = \begin{cases} F_n(\psi) & \text{se } \psi = \text{const. su } B_{i,n} \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Detta $\tilde{\phi}_n$ l'estensione di ϕ_n a tutto Ω si ha che l'unico punto di minimo di \tilde{F}_n su $H^1(\Omega)$ è $\tilde{\phi}_n$ e

$$F_n(\phi_n) = \min_{\psi \in V_n} F_n(\psi) = \min_{\psi \in H^1(\Omega)} \tilde{F}_n(\psi) = \tilde{F}_n(\tilde{\phi}_n). \quad (4.106)$$

I funzionali \tilde{F}_n sono equicoercivi e Γ -convergono al funzionale \tilde{F} . Per essere più precisi:

Teorema 4.23. *Si ha che $\tilde{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \tilde{F}$ nella topologia debole di $H^1(\Omega)$, ovvero valgono*

1. (Γ -lim inf) per ogni successione $\{\psi_n\} \subset H^1(\Omega)$ tale che $\psi_n \rightharpoonup \psi$ vale

$$\tilde{F}(\psi) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}_n(\psi_n)$$

2. (Γ -lim sup) per ogni $\psi \in H^1(\Omega)$ esiste una recovery sequence $\{\psi_n\} \subset H^1(\Omega)$ tale che $\psi_n \rightharpoonup \psi$ e

$$\tilde{F}(\psi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}_n(\psi_n).$$

Inoltre la famiglia di funzionali $\{\tilde{F}_n\}$ è equicoerciva: se $\{\psi_n\} \subset H^1(\Omega)$ è tale che

$$\tilde{F}_n(\psi_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

per qualche $C \geq 0$, allora esiste una sottosuccessione $\{\psi_{n_k}\}$ e una $\psi \in H^1(\Omega)$ tale che $\psi_{n_k} \rightharpoonup \psi$.

Prima di dare la dimostrazione, vediamo come da questo Teorema segue il Teorema 4.22 di stabilità delle soluzioni di (4.101).

Dimostrazione del Teorema 4.22. Sia ϕ_n la soluzione di (4.103) e $\tilde{\phi}_n$ la sua estensione. Sappiamo che $\tilde{\phi}_n$ è punto di minimo di \tilde{F}_n su $H^1(\Omega)$. Dal momento che $\tilde{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \tilde{F}$ e che i funzionali $\{\tilde{F}_n\}$ sono equicoercivi, siamo nelle ipotesi del Teorema 2.4, che implica, a meno di estrarre sottosuccessioni,

1. $\tilde{\phi}_n \rightarrow \psi$ con ψ punto di minimo di \tilde{F} su $H^1(\Omega)$;
2. $\tilde{F}_n(\tilde{\phi}_n) \rightarrow \tilde{F}(\psi)$.

Per la (4.105) si ha che l'unico punto di minimo di \tilde{F} su $H^1(\Omega)$ è proprio $\tilde{\phi}$, estensione ad Ω dell'unico punto di minimo ϕ di F su V , che è anche soluzione di (4.101). Dunque $\psi = \tilde{\phi}$ e concludiamo che $\tilde{\psi}_n \rightarrow \tilde{\phi}$ in $H^1(\Omega)$. \square

Diamo ora la dimostrazione del Teorema 4.23.

Dimostrazione del Teorema 4.23. 1. Equicoercività. Supponiamo che

$$\tilde{F}_n(\psi_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.107)$$

e proviamo che esiste una costante $C_1 \geq 0$ indipendente da n tale che

$$\|\psi_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.108)$$

che ci garantisce la precompattanza debole di $\{\psi_n\}$. L'ipotesi (4.107) implica che ψ_n è costante su $B_{i,n}$ e vale

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \psi_n|^2 \leq C + \int_{\partial\Omega} \psi_n \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - 2\pi \sum_{i=1}^N d_i \psi_n|_{\partial B_{i,n}} \quad (4.109)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza di Holder e quella di traccia

$$\int_{\partial\Omega} \psi_n \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|g \times g_\tau\|_\infty \|\psi_n\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.110)$$

Visto che ϕ_n è costante sulle $B_{i,n}$ si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \psi_n|^2 = \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi_n|^2$$

e poiché $\int_{\partial\Omega} \psi_n = 0$ vale la disuguaglianza di Poincaré:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi_n|^2 \geq K \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.111)$$

Infine, sempre dal fatto che ψ_n è costante su $B_{i,n}$ si ha

$$\psi_n|_{\partial B_{i,n}} = \psi_n|_{B_{i,n}} = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B_{i,n}} \psi_n \leq \|\psi_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi_n\|_{H^1(\Omega)}$$

da cui

$$-2\pi \sum_{i=1}^N d_i \psi_n|_{\partial B_{i,n}} \leq 2\pi d \|\psi_n\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.112)$$

Sostituendo (4.110), (4.111) ed (4.112) in (4.109) otteniamo la stima

$$\|\psi_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{C} \|\psi_n\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.113)$$

con C costante dipendente solo da g e da Ω . La (4.113) implica la (4.108).

2. Γ -lim inf. Supponiamo che $\psi_n \rightharpoonup \psi$ in $H^1(\Omega)$. Possiamo supporre $\tilde{F}_n(\psi_n) < +\infty$ definitivamente, altrimenti la tesi è banale. Dunque (a meno di scartare un numero finito di termini) ψ_n è costante su $B_{i,n}$. Essendo $\psi_n \rightharpoonup \psi$ in $H^1(\Omega)$, in particolare $\psi_n \rightarrow \psi$ in $L^2(\Omega)$ da cui concludiamo che ψ è costante sulle B_i . Quindi si ha

$$\int_{\Omega_n} |\nabla \psi_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \psi_n|^2 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_\infty} |\nabla \psi|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2$$

e dalla debole semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole

$$\int_{\Omega_\infty} |\nabla \phi|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_n} |\nabla \phi_n|^2. \quad (4.114)$$

Dal momento che $\psi_n \rightarrow \psi$ in $L^2(\Omega)$ segue che esiste una estratta tale che $\psi_{n_k} \rightarrow \psi$ q.o. in Ω , dunque

$$\psi_{n_k}|_{\partial B_{i,n_k}} \rightarrow \psi|_{\partial B_i}.$$

Questo implica che

$$\psi_n|_{\partial B_{i,n}} \rightarrow \psi|_{\partial B_i}. \quad (4.115)$$

Se infatti per assurdo non valesse (4.115), esisterebbe una sottosuccessione per cui

$$\left| \psi_{n_k}|_{\partial B_{i,n_k}} - \psi|_{\partial B_i} \right| \geq \delta \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \quad (4.116)$$

con $\delta > 0$ opportuno. Ma $\psi_{n_k} \rightarrow \psi$ in $L^2(\Omega)$, per cui esiste un'estratta $\psi_{n_{k_j}}$ tale che $\psi_{n_{k_j}} \rightarrow \psi$ q.o. in Ω , che contraddice la (4.116). Infine, poiché $\psi_n \rightharpoonup \psi$ in $H^1(\Omega)$ allora $\psi_n \rightharpoonup \psi$ in $H^{1/2}(\partial\Omega)$, da cui

$$\int_{\partial\Omega} \psi_n \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \rightarrow \int_{\partial\Omega} \psi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right). \quad (4.117)$$

Dalle (4.114), (4.115) e (4.117) si ottiene la tesi

$$F(\psi) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(\psi_n).$$

3. Γ -lim sup. Fissata una $\psi \in H^1(\Omega)$ dobbiamo costruire una recovery sequence. Se $\tilde{F}(\psi) = +\infty$ la tesi è banale (qualsiasi recovery sequence va bene). Se $\tilde{F}(\psi) < +\infty$ allora ψ è costante su B_i . A questo punto si definisce una funzione ψ_n che coincide con $\psi|_{B_i}$ su una palla più grande di B_i e tale che $\psi_n \rightarrow \psi$ in $H^1(\Omega)$. Da questo segue la tesi. \square

Capitolo 5

Conclusioni: Γ -convergenza all'ordine 1

Per motivi di spazio riportiamo solamente l'enunciato del risultato di Γ -convergenza all'ordine 1 per i funzionali con dato al bordo. Le notazioni sono le stesse del Paragrafo 4.7.

Introduciamo l'insieme dei punti di minimo del funzionale limite F^g :

$$\mathcal{X} = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i} \in X(\bar{\Omega}) : \sum_{i=1}^N d_i = d, d_i > 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

dove ricordiamo che $d = \deg(g; \partial\Omega)$ che stiamo assumendo non negativo. Definiamo i funzionali $F_\varepsilon^{g(1)}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$F_\varepsilon^{g(1)}(\mu) := E_\varepsilon^g(\mu) - \pi d |\log \varepsilon|.$$

Sia

$$\mathcal{P} = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^d \delta_{x_i} \in \mathcal{X} : x_i \in \Omega, x_i \neq x_j, \text{ per } 1 \leq i \neq j \leq d \right\}$$

e definiamo il funzionale $W^g: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dato da

$$W^g(\mu) := \begin{cases} W(x_1, \dots, x_N) & \text{se } \mu \in \mathcal{P} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove W è l'energia rinormalizzata definita in (3.39). Vale il seguente risultato:

Teorema 5.1. *Si ha che $F_\varepsilon^{g(1)} \xrightarrow{\Gamma} W^g$ sull'insieme \mathcal{X} rispetto alla topologia $\text{Lip}(\bar{\Omega})^*$. Nel dettaglio, per ogni fissata una successione $\varepsilon_n \searrow 0$ si ha:*

1. (Γ -lim inf) per ogni successione $\{\mu_n\} \subset \mathcal{X}$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$ con $\mu \in \mathcal{X}$ vale

$$W^g(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^{g(1)}(\mu_n);$$

2. (Γ -lim sup) per ogni $\mu \in \mathcal{X}$ esiste una recovery sequence $\{\mu_n\} \subset \mathcal{X}$ tale che $\mu_n \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$ e

$$W^g(\mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_n}^{g(1)}(\mu_n).$$

Inoltre la famiglia $\{F_\varepsilon^{g(1)}\}$ è equicoerciva: se $\{\mu_n\} \subset \mathcal{X}$ è tale che

$$F_{\varepsilon_n}^{g(1)}(\mu_n) \leq C \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

con $C \geq 0$ costante indipendente da n , allora esiste una sottosuccessione $\{\mu_{n_k}\}$ e una $\mu \in \mathcal{X}$ tale che $\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$.

I risultati di questo teorema e del Teorema 4.19 si riassumono dicendo che per i funzionali E_ε^g vale lo sviluppo per Γ -convergenza

$$E_\varepsilon^g = F^g + |\log \varepsilon| F_\varepsilon^{g(1)} + o(\varepsilon).$$

Come conseguenza di questo sviluppo abbiamo un teorema di caratterizzazione dei punti di accumulazione di

$$\arg \min E_\varepsilon^g$$

e dei relativi minimi

$$m_\varepsilon := \min_{\nu \in X(\bar{\Omega})} E_\varepsilon^g(\nu).$$

Ricordiamo che l'energia rinormalizzata W , una volta posti tutti i $d_i = 1$, ammette minimo su $\bar{\Omega}^d$, che indichiamo con

$$\min W := \min \{W(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \bar{\Omega}\}.$$

I punti di minimo sono configurazioni (x_1, \dots, x_d) con i punti x_i contenuti in Ω e distinti tra loro.

Corollario 5.2. *Siano $\{\mu_\varepsilon\} \subset X(\bar{\Omega})$ tali che*

$$E_\varepsilon^g(\mu_\varepsilon) = m_\varepsilon$$

per ogni ε fissato. Allora esiste una successione $\varepsilon_n \searrow 0$ tale che

$$m_{\varepsilon_n} = \pi d + |\log \varepsilon_n| \min W + o(\varepsilon_n) \quad (5.1)$$

e che

$$\mu_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\text{Lip}^*} \mu$$

con $\mu = \sum_{i=1}^d \delta_{x_i}$ dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ è tale che $W(\mathbf{x}) = \min W$.

Si noti che la (5.1) riassume le considerazioni euristiche fatte sullo sviluppo asintotico dell'energia (3.38) all'inizio del Capitolo 4.

Appendice A

Appendice

A.1 Spazi di funzioni regolari

In questa appendice richiameremo le definizioni degli spazi di funzioni utilizzati in questa Tesi, con le principali proprietà. Si faccia riferimento a [P], [A], [L], [EG] e [GMS].

A.1.1 Spazi di funzioni continue

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Indichiamo con $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Introduciamo su $C(X)$ l'applicazione $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Indichiamo poi con

$$C_b(X) = \{f \in C(X) : \|f\|_\infty < +\infty\}$$

lo spazio delle funzioni continue e limitate, che è di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, il suo *supporto* è l'insieme $\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Diciamo che f è a *supporto compatto* se $\text{supp } f$ è compatto in X . L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto lo indicheremo con $C_c(X)$. $C_c(X)$ è un sottospazio vettoriale di $C_b(X)$ e la sua chiusura nella norma del sup è l'insieme

$$C_0(X) := \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

In modo equivalente, possiamo definire $C_0(X)$ come l'insieme delle $f \in C(X)$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ è compatto in X . Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, in particolare è di Hausdorff e localmente compatto. L'insieme $C_0(\Omega)$ coincide con le $f \in C(\Omega)$ tali che $f(x_n) \rightarrow 0$ per ogni successione di punti $\{x_n\}$ di Ω tali che $x_n \rightarrow y$, con $y \in \partial\Omega$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, $C(\mathbb{R}^n)$ sono le $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tali che $f(x_n) \rightarrow 0$ se $\|x_n\| \rightarrow +\infty$.

Si hanno le inclusioni $C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X)$, che in generale sono strette. Se X è compatto sono tutte uguaglianze.

A.1.2 $C^1(\bar{A})$

Definizione A.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^1(\bar{A})$ se esiste un aperto U tale che $A \subset U$ ed una funzione $F \in C^1(U)$ tale che $F = f$ su \bar{A} .

Definiamo il differenziale di f in un punto $x \in \bar{A}$ come il differenziale in x di una qualsiasi estensione C^1 di f . Esiste anche un'altra definizione dovuta a Whitney di funzione C^1 su un insieme chiuso (si veda [GM])

Definizione A.2. Sia E un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^n privo di punti isolati. Diciamo che $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^1(E)$ nel senso di Whitney se

1. esiste un differenziale di f in ogni punto $x \in E$, cioè per ogni $x \in E$ esiste una applicazione lineare $L_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in E}} R(y; x) = 0$$

dove

$$R(y; x) := \frac{|f(y) - f(x) - L_x(y - x)|}{|y - x|},$$

2. se $\nabla f(x)$ è il vettore gradiente associato ad L_x , il campo vettoriale

$$x \in E \mapsto \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$$

è continuo,

3. $R(y; x) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow x$ uniformemente sui compatti di E .

Se $f \in C^1(\bar{A})$ rispetto alla prima definizione, allora $f \in C^1(\bar{A})$ anche nel senso di Whitney. Il viceversa è dato da un Teorema dimostrato da Whitney.

Teorema A.3 (Whitney). *Sia E sottoinsieme di \mathbb{R}^n chiuso e senza punti isolati e supponiamo che $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ sia $C^1(E)$ nel senso di Whitney. Allora esiste $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che è $C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $F = f$ su E . Inoltre se L_x è il differenziale di Whitney di f in $x \in E$, allora $L_x = DF(x)$ differenziale di F in x .*

Nel nostro caso abbiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto semplicemente connesso con frontiera regolare. Allora $\partial\Omega$ è un arco di Jordan. Assegnamo $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$. Diciamo che g è *regolare* se le sue componenti (vedendo g come funzione a valori in \mathbb{R}^2) è $C^1(\partial\Omega)$ nel senso di Whitney. Come conseguenza del Teorema A.3 potremo supporre che g sia la restrizione a $\partial\Omega$ di una qualche funzione $G \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^2)$, in modo che il differenziale di Whitney di g coincida con il differenziale di G su $\partial\Omega$. Se $v: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori su $\partial\Omega$ definiamo la derivata di g nella direzione v come

$$\partial_v g(x) := \nabla g(x) \cdot v(x).$$

In particolare con $n(x)$ indicheremo il campo di vettori normale a $\partial\Omega$ e con $\tau(x)$ il campo di vettori tangente a $\partial\Omega$. Ci riferiremo a $\partial_n g$ e $\partial_\tau g$ rispettivamente come alla derivata normale e alla derivata tangenziale di g su $\partial\Omega$.

A.2 Risultati di Analisi Funzionale

Se X è uno spazio di Banach, ricordiamo che il suo duale X^* è a sua volta uno spazio di Banach con la norma operatoriale

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in X^*.$$

La *topologia debole* su X è definita come la topologia più debole (con meno aperti) che rende continua la famiglia di seminorme

$$\{p_\varphi : \varphi \in X^*\}$$

dove la seminorma p_φ è definita da $p_\varphi(x) = \varphi(x)$. Una successione $\{x_n\} \subset X$ converge ad $x \in X$ nella topologia debole, in simboli $x_n \rightharpoonup x$ se e solo se

$$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{per ogni } \varphi \in X^*.$$

Analogamente si definisce su X^* la topologia **-debole* come la più debole topologia che rende continua la famiglia di seminorme su X^*

$$\{p_x : x \in X\}$$

dove p_x è la seminorma definita da $p_x(\varphi) = \varphi(x)$. Una successione $\{\varphi_n\} \subset X^*$ converge a $\varphi \in X^*$ nella topologia **-debole*, in simboli $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ se e solo se

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Per ulteriori dettagli sulle topologie deboli e **-deboli* si veda il Capitolo 5 di [C2].

Valgolo i seguenti risultati:

Teorema A.4. *Sia X uno spazio di Banach. La norma è debolmente semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole, ovvero se $\{x_n\} \subset X$ è tale che $x_n \rightharpoonup x$ allora $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

Teorema A.5. *Sia X uno spazio di Banach separabile e riflessivo. Se $\{x_n\} \subset X$ è una successione limitata, esiste una sua estratta debolmente convergente.*

Teorema A.6. *Sia X uno spazio di Banach separabile e riflessivo. Sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme convesso. Sono equivalenti*

1. S è (sequenzialmente) chiuso;
2. S è (sequenzialmente) debolmente chiuso.

A.3 Teoria della misura

Il riferimento per tale sezione è il Capitolo 1 di [FL]. Sia X un insieme. Una *σ -algebra* su X è una collezione di sottoinsiemi \mathcal{M} di X tale che $\emptyset \in \mathcal{M}$, se $A \in \mathcal{M}$ allora $A^c \in \mathcal{M}$ e che sia chiusa per unioni numerabili. (X, \mathcal{M}) si dice *spazio misurabile* e gli elementi di \mathcal{M} sono gli *insiemi misurabili*. Dato A misurabile, una *partizione misurabile* di A è una famiglia numerabile di insiemi $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}$ a due a due disgiunti tali che $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Una *misura positiva* su (X, \mathcal{M}) è una funzione $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $\lambda(\emptyset) = 0$ e che $\lambda(A) = \sum_{i \in I} \lambda(A_i)$ per ogni partizione misurabile $\{A_i\}_{i \in I}$ di A . La tripletta $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ si dice *spazio di misura*. Una *misura con segno* su (X, \mathcal{M}) è una funzione $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tale che $\lambda(\emptyset) = 0$, che assume al massimo uno tra i valori $-\infty$ e $+\infty$ e che $\lambda(A) = \sum_{i \in I} \lambda(A_i)$ per ogni partizione misurabile di A . λ si dice *misura finita* se non assume i valori $\pm\infty$. Il *supporto* di λ è l'insieme

$$\text{supp}(\lambda) = \overline{\{x \in X : \lambda(U) > 0 \text{ per ogni intorno aperto } U \text{ di } x\}}.$$

Data una misura con segno λ , la sua *variazione totale* è la misura positiva $|\lambda| : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i \in I} |\lambda(A_i)| : \{A_i\}_{i \in I} \text{ partizione misurabile di } A \right\}.$$

Se λ è finita, anche $|\lambda|$ è finita.

A.3.1 Regolarità di misure

Sia $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ uno spazio di misura. Supponiamo che X sia uno spazio topologico. La σ -algebra di Borel di X si indica con $\mathcal{B}(X)$ ed è la più piccola σ -algebra contenente gli aperti della topologia di X .

Definizione A.7 (Regolarità di una misura). La misura λ si dice *misura di Borel* se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$. Una misura di Borel λ è *regolare* se per ogni $A \in \mathcal{M}$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $A \subseteq B$ e $\lambda(A) = \lambda(B)$. Se λ è una misura di Borel positiva, si dice *misura di Radon* se

1. $\lambda(K) < +\infty$ per ogni $K \subseteq X$ compatto;
2. λ è *internamente regolare* sugli aperti di X , ovvero

$$\lambda(A) = \sup \{ \lambda(K) : K \subseteq A, K \text{ compatto} \}$$

per ogni $A \subseteq X$ aperto;

3. λ è *esternamente regolare* su \mathcal{M} , vale cioè

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(U) : A \subseteq U, U \text{ aperto} \}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}$.

Infine, una misura di Borel con segno λ si dice *misura di Radon* se la relativa variazione totale $|\lambda|$ è di Radon.

Introduciamo lo spazio

$$M(X; \mathbb{R}) = \{ \lambda : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \text{ misura con segno, finita e di Radon} \}$$

La funzione $\|\cdot\| : M(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\|\lambda\| = |\lambda|(X)$ definisce una norma su $M(X)$, che lo rende uno spazio di Banach.

Esempio A.8 (Misura di Dirac). Sia X spazio topologico e \mathcal{M} una σ -algebra contenente i boreliani di X . Fissato $a \in X$ definiamo la *misura di Dirac concentrata in a* come

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in A \\ 0, & \text{se } a \notin A \end{cases}$$

per $A \in \mathcal{M}$. Allora δ_a è una misura di Borel finita sui compatti (perché è finita su \mathcal{M}) ed internamente regolare (perché i punti sono compatti). Se X è di Hausdorff, δ_a è anche esternamente regolare, e dunque è una misura di Radon. Infatti se $A \in \mathcal{M}$ e $a \in A$, allora $\delta_a(A) = 1$ e quindi il sup è raggiunto da $U = X$. Se invece $a \notin A$, poiché X è di Hausdorff, per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto

U_a di a e un intorno aperto U_x di x disgiunti. Posto $U = \bigcup_{x \in A} U_x$, si ha che U è un aperto contenente A e tale che $a \notin X$ e allora $\delta_a(U) = 0$. Notiamo poi che $\text{supp } \delta_a = \{a\}$ e che $\|\delta_a\| = 1$, quindi $\delta_a \in M(X; \mathbb{R})$. Inoltre se $\delta = \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}$, con $x_i \in X, d_i \in \mathbb{R}$, si ha $\text{supp } \delta = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $\|\delta\| = \sum_{i=1}^N |d_i|$, per cui $\delta \in M(X; \mathbb{R})$. Ma allora l'insieme $\left\{ \delta = \sum_{i=1}^N d_i x_i : N \in \mathbb{N}, x_i \in X, d_i \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(X; \mathbb{R})$, ed è anche denso.

Nel caso in cui X sia uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, possiamo identificare $M(X; \mathbb{R})$ come il duale di $C_0(X)$. Questo è il contenuto del teorema di Riesz:

Teorema A.9 (Teorema di rappresentazione di Riesz per $C_0(X)^*$). *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Allora ogni funzionale lineare continuo $L: C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ è rappresentato da un'unica misura $\lambda \in M(X; \mathbb{R})$, nel senso che $L = L_\lambda$, dove*

$$L_\lambda(f) = \int_X f d\lambda, \quad \text{per ogni } f \in C_0(X) \quad (\text{A.1})$$

Inoltre $\|L_\lambda\| = \|\lambda\|$. Viceversa, ogni funzionale della forma (A.1) è un elemento di $C_0(X)^$. Dunque l'applicazione $\lambda \mapsto L_\lambda$ è un isomorfismo isometrico tra $M(X; \mathbb{R})$ e $C_0(X)^*$.*

A.3.2 Convergenza *-debole di misure

Come conseguenza del Teorema di Riesz, possiamo introdurre una convergenza *-debole su $M(X; \mathbb{R})$ per mezzo dell'isomorfismo $\lambda \mapsto L_\lambda$. Diremo che la successione $\{\lambda_n\}$ converge *-debolmente a λ , in simboli $\lambda_n \xrightarrow{*} \lambda$, se $L_{\lambda_n} \xrightarrow{*} L_\lambda$ in $C_0(X)^*$, ovvero se

$$\int_X f d\lambda_n \rightarrow \int_X f d\lambda, \quad \text{per ogni } f \in C_0(X).$$

Poiché $\lambda \mapsto L_\lambda$ è anche una isometria, la convergenza *-debole di misure ha tutte le solite proprietà della convergenza *-debole. Si ha che:

Proposizione A.10. *Lo spazio $C_0(X)$ è separabile se e solo se X è metrizzabile e σ -compatto.*

In tali ipotesi su X abbiamo che su $C_0(X)^*$ vale il Teorema di Alaoglu sequenziale (cita appendice Analisi Funzionale) e quindi

Teorema A.11. *Sia X spazio topologico metrizzabile e σ -compatto. Se $\{\lambda_n\} \subseteq M(X; \mathbb{R})$ sono tali che $\|\lambda_n\| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono una sottosuccessione λ_{n_k} e una misura $\lambda \in M(X; \mathbb{R})$ tali che $\lambda_{n_k} \xrightarrow{*} \lambda$. Inoltre valgono*

1. (Principio di uniforme limitatezza) se $\sup_n \int_X f d\lambda_n < +\infty$ per ogni $f \in C_0(X)$ fissata, allora $\sup_n \|\lambda_n\| < +\infty$;
2. come conseguenza del principio di uniforme limitatezza, se $\lambda_n \xrightarrow{*} \lambda$, allora esiste $C > 0$ tale che $\sup_n \|\lambda_n\| \leq C$;
3. (Semicontinuità *-debole inferiore della norma) se $\lambda_n \xrightarrow{*} \lambda$ allora

$$\|\lambda\| \leq \liminf_n \|\lambda_n\|.$$

A.4 Disuguaglianze di Poincaré

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso limitato e $1 \leq p < +\infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$ indichiamo la sua media su Ω con

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx.$$

Ricordiamo la disuguaglianza di Poincaré:

Teorema A.12 ([L], Teorema 12.23). *Esiste una costante $C = C(\Omega, p) > 0$ tale che*

$$\int_\Omega |u(x) - u_\Omega|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Analogamente, vale anche una disuguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Teorema A.13. *Esiste una costante $C = C(\Omega, p) > 0$ tale che*

$$\int_\Omega |u|^p \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \tag{A.2}$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Vogliamo esempi di sottospazi $V_0 \subset W^{1,p}(\Omega)$ diversi da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in cui valga una disuguaglianza di Poincaré del tipo (A.2). L'idea è che la (A.2) vale non appena la funzione u ha abbastanza zeri, come accade nel caso di $W_0^{1,p}(\Omega)$. Più precisamente vale il seguente:

Teorema A.14. *Sia $V_0 \subset W^{1,p}(\Omega)$ sottospazio vettoriale tale che*

1. V_0 è debolmente chiuso;
2. V_0 l'unica costante contenuta in V_0 è quella nulla: se $u \in V_0$ è costante allora $u = 0$ q.o. in Ω .

Allora esiste una costante $C = C(\Omega, p) > 0$ tale che

$$\int_\Omega |u|^p \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \tag{A.3}$$

per ogni $u \in V_0$.

Dimostrazione. Per assurdo, non valga la (A.3). Allora esiste una successione $\{u_n\} \subset V_0$ tale che

$$\|u_n\|_{L^p} > n \|\nabla u_n\|_{L^p}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{A.4}$$

Definiamo la successione normalizzata

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^p}}$$

e osserviamo che è limitata in norma $W^{1,p}$. Infatti $\|v_n\|_{L^p} = 1$ e poiché

$$\nabla v_n = \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|_{L^p}}$$

dalla (A.4) si ha

$$\|\nabla u_n\|_{L^p} = \frac{\|\nabla u_n\|_{L^p}}{\|u_n\|_{L^p}} < \frac{1}{n}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.5})$$

Ma V_0 è debolmete chiuso, per cui esiste $v_0 \in V_0$ tale che $v_n \rightharpoonup v_0$ debolmente in $W^{1,p}$, a meno di estratte e quindi $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ in $(L^2(\Omega))^n$. Per la debole semicontinuità inferiore della norma si ottiene

$$\|\nabla v_0\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla v_n\|_{L^p} \stackrel{(\text{A.5})}{\leq} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $v_0 = c$ q.o. in Ω . Essendo $v_0 \in V_0$, dalle ipotesi segue che $v_0 = 0$ q.o. in Ω . Tuttavia $v_n \rightharpoonup v_0$ in $W^{1,p}$, per cui dall'immersione compatta $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ segue che $v_n \rightarrow v_0$ in L^p e passando al limite in $\|v_n\|_{L^p} = 1$ si conclude che $\|v_0\|_{L^p} = 1$, che è un assurdo visto che $v_0 = 0$. \square

Corollario A.15. *Il sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$*

$$V_0 := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u = 0 \right\}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema A.14. In particolare in V_0 vale la (A.3).

Dimostrazione. Il funzionale $T: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$T(u) = \int_{\partial\Omega} u$$

è lineare e continuo. Infatti dalla disuguaglianza di Holder e da quella di traccia

$$|T(u)| \leq \int_{\partial\Omega} |u| \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C |\partial\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ne segue che V_0 è debolmente chiuso, per definizione di convergenza debole. Infatti se $\{u_n\} \subset V_0$ è tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$ allora $T(u_n) \rightarrow T(u)$. Ma $u_n \in V_0$ e quindi $T(u_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui $T(u) = 0$, cioè $u \in V_0$. Infine se $u \in V_0$ e $v = c$ q.o. in Ω allora $0 = \int_{\partial\Omega} u = \int_{\partial\Omega} c$ da cui $c = 0$. \square

Altri esempi di sottospazi di $W^{1,p}(\Omega)$ in cui vale la disuguaglianza di Poincaré sono

$$\begin{aligned} V_i &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : T_i(u) = 0\} \\ V_3 &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ su } E\} \\ V_4 &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ su } \Gamma\} \end{aligned}$$

con

$$T_1(u) := \int_E u \quad \text{e} \quad T_2(u) := \int_\Gamma u$$

dove $E \subset \Omega$ è un insieme di misura n -dimensionale positiva e $\Gamma \subset \partial\Omega$ insieme di misura $(n-1)$ -dimensionale positiva.

A.5 Problema di Neumann

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera regolare e indichiamo con ν la sua normale esterna. Siano date $f \in C(\Omega)$ forzante e $g \in C(\partial\Omega)$ dato al bordo. Consideriamo il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Teorema A.16. *Esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ soluzione di (A.6) se e solo se vale la condizione di compatibilità*

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g. \quad (\text{A.7})$$

Un verso della dimostrazione è immediato. Infatti se u è soluzione di (A.6), dal Teorema della divergenza si ha

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} g.$$

Il viceversa possiamo provarlo passando alla formulazione debole.

Definizione A.17. Siano $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Diciamo che $u \in H^2(\Omega)$ è una soluzione debole di (A.6) se vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial\Omega} g \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad (\text{A.8})$$

per ogni funzione test $\varphi \in H^1(\Omega)$.

La (A.8) è la giusta formulazione debole perché è immediato verificare che vale la seguente:

Proposizione A.18. *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ è soluzione classica di (A.6) allora è anche soluzione debole. Viceversa se u è soluzione debole ed è regolare, è anche soluzione classica.*

Mostriamo infine il risultato di esistenza della soluzione debole:

Teorema A.19. *Siano $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Omega)$. Esiste una soluzione debole di (A.6) se e solo se vale la condizione di compatibilità (A.7). Detta u tale soluzione, tutte le altre soluzioni sono della forma $u + c$ con $c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Passo 1. Se $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione debole di (A.6) prendendo $\varphi = 1$ come funzione test nella formulazione debole (A.8) otteniamo la condizione di compatibilità (A.7).

Passo 2. Viceversa, supponiamo che valga la (A.7). Introduciamo il funzionale $F: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} g u - \int_{\Omega} f u$$

e notiamo che u è soluzione debole di (A.6) se e soltanto se minimizza F su $H^1(\Omega)$. Infatti se fissiamo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e definiamo la variazione $e(t) = F(u+t\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$e'(0) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial\Omega} g \varphi - \int_{\Omega} f \varphi.$$

Passo 3. Mostriamo che F ammette minimo usando il metodo diretto (Teorema 2.1). Osserviamo che $F = D + G$ con

$$D := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad G := F - D.$$

Si ha che D è debolmente semicontinuo inferiormente, mentre G lo è essendo un funzionale lineare e continuo su $H^1(\Omega)$:

$$|G(u)| \leq \|g\|_{H^{1/2}} \|u\|_{H^{1/2}} + \|f\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} (C \|g\|_{H^{1/2}} + \|f\|_{H^1})$$

usando la disuguaglianza di traccia. Introduciamo ora il sottospazio chiuso

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u = 0 \right\}.$$

Per quanto detto nell'Appendice A.4 in V vale la disuguaglianza di Poincaré e quindi esiste una costante K tale che $\|\nabla u\|_{L^2} \geq K \|u\|_{H^1}$. In tale sottospazio il funzionale F è coercivo perché

$$F(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \|G\| \|u\|_{H^1} \geq \frac{K^2}{2} \|u\|_{H^1}^2 - \|G\| \|u\|_{H^1}.$$

Per il metodo diretto esiste quindi $u_0 \in V$ tale che

$$F(u_0) = \min_{v \in V} F(v). \tag{A.9}$$

Dobbiamo vedere che effettivamente u_0 è minimo di F su tutto Ω . Notiamo che per la (A.7) il funzionale F è invariante per traslazioni, ovvero

$$F(v) = F(v + c), \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega), c \in \mathbb{R}. \tag{A.10}$$

Se $v \in H^1(\Omega)$ e denotiamo con $v_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$ abbiamo che $v - v_{\Omega} \in V$, dunque

$$F(u_0) \stackrel{(A.9)}{\leq} F(v - v_{\Omega}) \stackrel{(A.10)}{=} F(v)$$

che è la tesi. □

Infine si prova, con usuali stime ellittiche, che le soluzioni deboli sono in realtà regolari, da cui otteniamo il Teorema A.16.

Bibliografia

- [A] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Second. Academic Press, 2003.
- [AB] G. Anzellotti e S. Baldo. «Asymptotic development by Γ -convergence». In: *Applied Mathematics and Optimization* 27.2 (1993), pp. 105–123.
- [ACP] R. Alicandro, M. Cicalese e M. Ponsiglione. «Variational equivalence between Ginzburg-Landau, XY spin systems and screw dislocations energies». In: *Indiana Univ. Math. J.* 60.1 (2011), pp. 171–208.
- [Ah] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. Third. McGraw-Hill, 1979.
- [AP] R. Alicandro e M. Ponsiglione. «Ginzburg-Landau Functionals and Renormalized Energy: a revised Γ -convergence approach». Preprint. 2011.
- [ASP] G. Anzellotti, B. Sisto e D. Percivale. «Dimension reduction in variational problems, asymptotic development in Γ -convergence and thin structures in elasticity». In: *Asymptotic Analysis* 9.1 (1994), pp. 61–100.
- [B1] H. Brezis. «Degree Theory: Old and New». In: *Topological Nonlinear Analysis II: Degree, Singularity and Variations*. Birkhäuser, 1997, pp. 87–108.
- [B2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [BB] H. Berestycki e H. Brezis. «On a free boundary problem arising in plasma physics». In: *Nonlinear Analysis* 4 (1980), pp. 415–436.
- [BBH1] H. Brezis, F. Bethuel e F. Hélein. *Ginzburg-Landau Vortices*. Birkhäuser, 1994.
- [BBH2] H. Brezis, F. Bethuel e F. Hélein. «Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional». In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 1.2 (1993), pp. 123–148.
- [BBM] J. Bourgain, H. Brezis e P. Mironescu. «Lifting in Sobolev Spaces». In: *Journal d'Analyse Mathématique* 80 (2000), pp. 37–86.
- [BGP] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu e R. Purice. «A boundary value problem related to the Ginzburg-Landau model». In: *Communications in Mathematical Physics* 142 (1991), pp. 1–23.
- [BN1] H. Brezis e L. Nirenberg. «Degree Theory and BMO; Part I: Compact Manifolds without Boundaries». In: *Selecta Mathematica* 1 (1995), pp. 197–263.

- [BN2] H. Brezis e L. Nirenberg. «Degree Theory and BMO; Part II: Compact Manifolds with Boundary». In: *Selecta Mathematica* 2.3 (1996), pp. 309–368.
- [Br] A. Braides. *Γ -convergence for Beginners*. Oxford University Press, 2002.
- [BT] A. Braides e L. Truskinovsky. «Asymptotic expansions by Γ -convergence». In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 20.1 (1998), pp. 21–62.
- [BZ] F. Bethuel e X. Zheng. «Density of Smooth Functions between Two Manifolds in Sobolev Spaces». In: *Journal of Functional Analysis* 80 (1988), pp. 60–75.
- [C1] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Second. Springer-Verlag, 1978.
- [C2] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Second. Springer, 2010.
- [D] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Vol. 8. Boston, MA: Birkhäuser, 1993.
- [DF] E. De Giorgi e T. Franzoni. «Su un tipo di convergenza variazionale». In: *Rend. Sem. Mat. Brescia* 3 (1979), pp. 63–101.
- [E] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. America Mathematical Society, 1998.
- [EG] L. C. Evans e R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1991.
- [F] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Second. Wiley, 2003.
- [Fe] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Vol. 153. Berlin: Springer, 1969.
- [FL] I. Fonseca e G. Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p spaces*. Springer, 2007.
- [Fo] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Second. Princeton University Press, 1992.
- [GM] M. Giaquinta e G. Modica. *Mathematical Analysis: an introduction to functions of several variables*. Birkhäuser, 2009.
- [GMS] M. Giaquinta, G. Modica e J. Soucek. *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I*. Springer, 1998.
- [GT] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. rev. 3rd printing, 2nd. Springer, 2001.
- [H] F. Hélein. «Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère». In: *C.R. Acad. Sci. Paris* 311 (1990), pp. 519–524.
- [J] R. L. Jerrard. «Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals». In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 30.4 (1999), pp. 721–746.

- [JS] R. L. Jerrard e H. M. Soner. «The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy». In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 14.2 (2002), pp. 151–191.
- [L] G. Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. American Mathematical Society, 2009.
- [M] C. B. J. Morrey. «The Problem of Plateau on a Riemannian Manifold». In: *Annals of Mathematics, Second Series* 49.4 (ott. 1948), pp. 807–851.
- [P] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Springer, 1996.
- [Po] M. Ponsiglione. «Elastic Energy Stored in a Crystal induced by Screw Dislocations: from discrete to continuous». In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 39.2 (2007), pp. 449–469.
- [S] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. Springer, 2010.
- [Sa] E. Sandier. «Lower Bounds for the Energy of Unit Vector Fields and Applications». In: *Journal of Functional Analysis* 152 (1998), pp. 379–403.
- [SS] E. Sandier e S. Serfaty. *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*. Birkhäuser, 2006.
- [SU] R. Schoen e K. Uhlenbeck. «Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps». In: *Journal of Differential Geometry* 18 (1983), pp. 253–268.
- [Z] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Springer, 1989.