



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Relatore:
Prof.
Annalisa Malusa

Candidato:
Silvio Fanzon
matricola 1216469

Sessione Invernale
Anno Accademico 2010-2011
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

Indice

Introduzione	3
1 Preliminari	8
1.1 Notazioni e definizioni di base	8
1.2 Spazi L^p e spazi di Sobolev	11
1.3 Richiami di analisi reale	15
1.4 Richiami di variabile complessa	16
1.5 Estensione delle mappe di Riemann	23
1.6 Elementi di analisi convessa	30
2 Il caso di dimensione $n = 2$	44
2.1 Introduzione	44
2.2 Dimostrazione con le tecniche di variabile complessa	45
2.3 La disuguaglianza di Wirtinger	50
3 Il caso di dimensione $n \geq 2$	64
3.1 Introduzione	64
3.2 Definizioni	65
3.3 Contenuto di Minkowski e insiemi convessi	74
3.4 La disuguaglianza di Brunn-Minkowski e la disuguaglianza isoperimetrica	79
3.5 Il problema dell'unicità	84
Bibliografia	94

Elenco delle figure

1.1	Teorema 1.5.6	26
1.2	Teorema 1.5.10	29
1.3	Iperpiani supporto	37
1.4	Lemma delle tre corde	40
3.1	Somma di triangoli	67
3.2	Somma di Minkowski e dimensione	68
3.3	Intorno di A di raggio r	68
3.4	$M + M \not\subseteq 2M$	68
3.5	$Q + \varepsilon B$	71
3.6	$Q + \varepsilon B$ scomposto	72
3.7	$R + \varepsilon B$	72
3.8	$R + \varepsilon B$ scomposto	73
3.9	$T + \varepsilon B$	85
3.10	Teorema 3.5.4	88

Introduzione

In questa Tesi ci occuperemo del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n . Divideremo la trattazione in due parti: nella prima discuteremo il problema nel piano, mentre nella seconda lo generalizzeremo in \mathbb{R}^n con $n \geq 2$. Il problema nel piano è il seguente:

Problema isoperimetrico. *Assegnata una costante $L > 0$, tra tutte le curve chiuse del piano di lunghezza L , determinare quella che racchiude l'area maggiore.*

La soluzione del problema è la circonferenza di lunghezza L . Questo era noto già ai Greci, che però non ne possedevano una dimostrazione che possa essere ritenuta valida secondo gli standard moderni di rigore matematico. Nonostante il problema sia così antico, le prime dimostrazioni arrivarono solamente nella prima metà dell'Ottocento. Uno dei primi tentativi fu ad opera di Jakob Steiner e risale al 1838. Quello che Steiner riuscì a dimostrare, con argomenti geometrici di tipo elementare, fu la condizione necessaria:

Condizione necessaria. *Se una soluzione del problema isoperimetrico esiste, allora è una circonferenza.*

Dopo questo successo, non tardarono ad arrivarne altri. Per esempio, Weierstrass propose una dimostrazione analitica della condizione necessaria, che utilizzava gli strumenti del calcolo delle variazioni. La prima soluzione completa del problema arrivò nel 1902 ad opera di Hurwitz. Ulteriori dettagli storici sull'origine del problema, sulla sua evoluzione e una rassegna di dimostrazioni, possono essere trovati sull'articolo divulgativo di Blåsjö [Blå].

Vediamo come possiamo affrontare il problema. Un modo vantaggioso è quello di formularlo sotto forma di disuguaglianza. Vista la condizione necessaria, possiamo enunciare il problema come:

Problema isoperimetrico. *Tra tutte le curve chiuse del piano, sufficientemente regolari e di lunghezza $L > 0$ fissata, la circonferenza è quella che racchiude l'area maggiore.*

Dunque, se consideriamo una curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ di lunghezza L , questa racchiuderà un'area non superiore a quella della circonferenza di perimetro L . Il raggio di questa circonferenza è $r = L/2\pi$ e quindi la sua area sarà $L^2/4\pi$. Se indichiamo con A l'area di γ , il problema si traduce nella disequazione

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}, \quad (1)$$

che viene chiamata disuguaglianza isoperimetrica. Alla disuguaglianza (1) si affianca in modo naturale una condizione di unicità: le uniche curve per le quali (1) vale con l'uguale sono le circonferenze.

Siamo quindi arrivati all'enunciato del Teorema principale del Capitolo 2 di questa Tesi.

Disuguaglianza isoperimetrica. *Sia $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di lunghezza L ed area A , che sia sufficientemente regolare. Allora vale la disuguaglianza*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se γ è una circonferenza.

Daremo due dimostrazioni del Teorema. La prima è presentata nel Paragrafo 2.2 e utilizza le tecniche di variabile complessa. L'idea originale è dovuta a Carleman [Car], e si basa sull'utilizzo del Teorema della Mappa di Riemann. Vediamo brevemente di cosa si tratta. Se consideriamo un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, vogliamo dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica

$$L^2(\partial\Omega) - 4\pi A(\Omega) \geq 0.$$

Se Ω è semplicemente connesso e non è tutto \mathbb{C} , per il Teorema della Mappa di Riemann esiste un omeomorfismo analitico $f: D \rightarrow \Omega$, dove D è il disco

unitario aperto. In questo modo riusciremo ad esprimere $A(\Omega)$ in funzione di f' . Il problema sorge nel momento in cui si vuole esprimere $L(\partial\Omega)$ in funzione di f' , dato che a priori non vi è garanzia che la f sia analitica su ∂D . Supporremo quindi che Ω sia un dominio di Jordan e che $\partial\Omega$ sia una curva analitica. In queste ipotesi si dimostra che la f si estende ad un omeomorfismo analitico in un dominio che contiene D . Una volta espressi A ed L in funzione di f' , si utilizzano le proprietà delle funzioni analitiche. In particolare, sviluppando la radice quadrata di f' in serie di potenze, otterremo una disuguaglianza equivalente alla (1), che sarà semplicemente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Lo stesso argomento ci permetterà anche di provare la condizione di unicità.

La seconda dimostrazione verrà presentata nel Paragrafo 2.3. Questa volta l'approccio al problema è differente. L'oggetto dell'esame sarà infatti la curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, parametrizzata come $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. La sua area e la sua lunghezza saranno espresse come funzionali che coinvolgono u e v e la disuguaglianza isoperimetrica verrà dimostrata nel caso di parametrizzazione $W^{1,1}$. Per farlo, dimostreremo prima la disuguaglianza di Wirtinger per funzioni $W^{1,2}$ periodiche. Poi faremo vedere che questa equivale alla disuguaglianza isoperimetrica. L'unicità verrà invece stabilita nella classe delle curve C^1 .

Passeremo poi ad affrontare il problema in \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$. La sua naturale generalizzazione in dimensione alta coinvolge i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , i loro volumi n -dimensionali e le loro superfici.

Problema isoperimetrico. *Tra tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di superficie $S > 0$ fissata, determinare quello che ha volume maggiore.*

Procedendo in analogia con il caso di \mathbb{R}^2 , possiamo congetturare che la soluzione del problema in \mathbb{R}^n sia la sfera. Questa volta però la situazione si complica rispetto a quella nel piano e gli approcci utilizzati in precedenza non sono più percorribili. Come prima, utilizziamo la congettura sulla soluzione per riformulare il problema.

Problema isoperimetrico. *Tra tutti gli insiemi di \mathbb{R}^n di superficie $S > 0$ fissata, quello con volume maggiore è la sfera.*

Quindi, considerando l'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di volume V e superficie S , si ha che V non è superiore al volume della sfera con la stessa superficie S . La sfera con superficie S ha raggio $r = (S/n\omega_n)^{\frac{1}{n-1}}$ e quindi il suo volume è $(S/n\omega_n)^{\frac{n}{n-1}}\omega_n$. Allora l'enunciato si traduce nella disuguaglianza isoperimetrica

$$V \leq \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \omega_n^{\frac{1}{n-1}}. \quad (2)$$

Anche questa volta si affianca alla (2) una condizione di unicità: gli unici sottoinsiemi di \mathbb{R}^n per i quali la (2) vale con l'uguale sono le sfere.

Disuguaglianza isoperimetrica. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme sufficientemente regolare, di superficie S e volume V . Allora vale la disuguaglianza isoperimetrica*

$$S^n - n^n \omega_n V^{n-1} \geq 0.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se A è una sfera.

Della dimostrazione di questo Teorema ci occuperemo nel Capitolo 3. La classe di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n per i quali proveremo la disuguaglianza sono i compatti. Per arrivare a questo risultato seguiremo la strada proposta nei libri di geometria convessa di Schneider [Sch] e Webster [Web], che prevede l'utilizzo di strumenti quali somma di Minkowski e contenuto di Minkowski. Vedremo come il contenuto di Minkowski sarà la giusta definizione di superficie per stabilire la disuguaglianza isoperimetrica. Lo strumento che ci permetterà di dimostrarla sarà la disuguaglianza di Brunn-Minkowski, che la implicherà come semplice corollario.

Un Paragrafo a parte viene invece dedicato all'unicità. Questa infatti non vale nella classe degli insiemi compatti. Si consideri ad esempio la sfera unitaria B alla quale viene aggiunto un segmento T . Questo insieme soddisfa la disuguaglianza (2) con l'uguale, tuttavia non è una sfera. Tale insieme non è però convesso. Si potrebbe quindi pensare che la classe giusta di sottoinsiemi in cui dimostrare l'unicità siano i compatti e convessi. Tuttavia T stesso soddisfa la (2) con l'uguale, avendo superficie e volume nulli. Proprio i segmenti infatti rappresentano il caso limite. Se ci restringiamo ai corpi convessi di \mathbb{R}^n , cioè quei sottoinsiemi che oltre ad essere compatti e convessi, hanno anche interno non vuoto, riusciamo a provare l'unicità.

Concludiamo questa Introduzione citando l'articolo di Osserman [Oss], che è una lettura obbligata per farsi un'idea dei risultati noti fino al 1978 sulla disuguaglianza isoperimetrica.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Notazioni e definizioni di base

Notazione. Cominciamo con le notazioni di base.

(i) Con $x = (x_1, \dots, x_n)$ indichiamo un punto di \mathbb{R}^n .

(ii) La distanza tra due punti in \mathbb{R}^n è quella euclidea, cioè se $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ definiamo λA come

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

(iv) Se $\rho > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $B(a, \rho)$ la palla aperta di centro l'origine e raggio ρ :

$$B(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \rho\}.$$

(v) B_r è la sfera chiusa di raggio r e centro l'origine in \mathbb{R}^n

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}.$$

Solamente in \mathbb{R}^2 indicheremo con D il disco aperto di centro l'origine e raggio unitario.

(vi) B è la sfera unitaria, ovvero $B = B_1$.

(vii) Evidentemente si ha che $B_r = rB$.

(viii) Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il loro prodotto scalare come

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(ix) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con \bar{A} la sua chiusura, con ∂A la sua frontiera e con $\text{Int}(A)$ la sua parte interna.

Teorema 1.1.1. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora*

(i) *vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

e vale l'uguale se e solo se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $x = \lambda y$.

(ii) *vale la disuguaglianza triangolare*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(iii) *vale l'identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

Definiamo la distanza di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ da un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.2 (Distanza di un punto da un insieme). Se $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto. Si definisce la distanza di x da A come

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Ovviamente se il punto $x \in A$ allora $d(x, A) = 0$.

Introduciamo ora il concetto di distanza tra due insiemi.

Definizione 1.1.3. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e compatto, e un $\lambda \geq 0$, l'insieme

$$A_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \lambda\}$$

si dice intorno di A di raggio λ .

Definizione 1.1.4 (Distanza di Hausdorff). Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compatti e non vuoti, la loro distanza di Hausdorff è definita come

$$\rho(A, B) := \inf\{\lambda \geq 0 : A \subset B_\lambda, B \subset A_\lambda\}.$$

Verifichiamo che effettivamente ρ è una distanza. Il fatto che $\rho(A, B) \geq 0$ e che $\rho(A, A) = 0$ è banale. Supponiamo ora che $\rho(A, B) = 0$. Allora, poiché $A_0 = A, B_0 = B$, si ha $A = B$. La simmetria segue dalla definizione. Verifichiamo infine la disuguaglianza triangolare. Sia $\rho(A, B) := \alpha$ e $\rho(B, C) := \beta$. Abbiamo che

$$A \subset B_\alpha \subset (C_\beta)_\alpha = C_{\alpha+\beta}, \quad C \subset B_\beta \subset (A_\alpha)_\beta = A_{\alpha+\beta},$$

quindi per definizione

$$\rho(A, C) \leq \alpha + \beta = \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

Osserviamo poi, che se $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\rho(\{x\}, \{y\}) = \|x - y\|$$

cioè la loro distanza di Hausdorff coincide con l'usuale distanza euclidea.

Proposizione 1.1.5 (Volumi e superfici di sfere). *Ricordiamo che il volume di $B \subset \mathbb{R}^n$ è dato da*

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!}, & \text{se } n = 2k, \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}, & \text{se } n = 2k+1 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

e la sua superficie è

$$S(B) = n\omega_n$$

Una sfera di raggio $r > 0$ in \mathbb{R}^n ha volume

$$V(B_r) = r^n V(B) = r^n \omega_n$$

e superficie

$$S(B_r) = nr^{n-1}\omega_n.$$

1.2 Spazi L^p e spazi di Sobolev

Cominciamo con l'introdurre gli spazi di funzioni che utilizzeremo. Per le definizioni ed i risultati ai quali non si fa riferimento esplicito, vedere [Bre]. In tutto questo paragrafo Ω sarà un insieme aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione 1.2.1. Sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

- (i) $C(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni continue $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) $C(\bar{\Omega})$ è l'insieme delle funzioni continue $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che possono essere estese con continuità a $\bar{\Omega}$.
- (iii) il supporto di u è definito

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

- (iv) $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ è compatto}\}$.

- (v) definiamo la norma su $C(\bar{\Omega})$ come

$$\|u\|_C = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

Osservazione 1.2.2. L'insieme $C(\bar{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_C$ è uno spazio di Banach.

Definizione 1.2.3. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e $k \in \mathbb{N}$. Definiamo:

- (i) $C^1[a, b]$ è l'insieme delle $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili con derivata prima continua.
- (ii) $C^k[a, b]$ è l'insieme delle $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivate continue fino all'ordine k . Con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_{x \in [a, b]} |u^{(i)}(x)|$$

è uno spazio di Banach.

- (iii) $C_0^k[a, b] = C_0[a, b] \cap C^k[a, b]$.

$$(iv) \quad C^\infty[a, b] = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k[a, b].$$

$$(v) \quad C_0^\infty[a, b] = C^\infty[a, b] \cap C_0[a, b].$$

Definizione 1.2.4 (Funzione hölderiana). Una funzione $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice hölderiana se esistono una costante $L \geq 0$ ed un esponente $0 \leq \alpha \leq 1$ tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|^\alpha, \quad \text{per ogni } x, y \in [a, b].$$

Esempio 1.2.5. La funzione radice quadrata è hölderiana in $[0, +\infty)$ con $L = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ ovvero

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}, \quad \text{per ogni } x, y \geq 0.$$

Definizione 1.2.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e misurabile. Diciamo che due funzioni $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono uguali quasi ovunque (abbreviato in q.o.) se sono uguali in tutto Ω tranne che su un sottoinsieme di misura nulla. L'uguaglianza q.o. è una relazione di equivalenza sullo spazio delle funzioni misurabili, che verrà indicata con ρ . Chiameremo poi $[u]$ la classe di equivalenza delle funzioni uguali q.o. ad u :

$$[u] = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u = v \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Per brevità, come consuetudine nella letteratura in merito, scriveremo u con l'intesa di riferirci alla classe $[u]$. Sia ora $1 \leq p \leq \infty$:

(i) se $p < \infty$ si definisce la norma L^p di u come

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e lo spazio $L^p(\Omega)$ come il quoziente

$$L^p(\Omega) = \frac{\{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} : \|u\|_{L^p} < +\infty\}}{\rho}.$$

(ii) se $p = \infty$ si definisce la norma L^∞ di u come

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u| = \inf\{M : |u(x)| \leq M \text{ q.o. in } \Omega\}$$

e lo spazio $L^\infty(\Omega)$ come il quoziente

$$L^\infty(\Omega) = \frac{\{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} : \|u\|_{L^\infty} < +\infty\}}{\rho}.$$

Osservazione 1.2.7. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, e $1 \leq p \leq \infty$ l'insieme $L^p(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ è uno spazio di Banach.

Teorema 1.2.8 (Disuguaglianza di Hölder). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $1 \leq p \leq \infty$, e sia*

$$p' := \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{se } p < \infty, \\ 1, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ allora $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}.$$

Definizione 1.2.9. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Si dice che un aperto Ω' è compattamente contenuto in Ω , e si scrive $\Omega' \subset\subset \Omega$, se $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ e se $\bar{\Omega}'$ è compatto. Si definisce lo spazio

$$L^p_{loc} = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Il seguente teorema può essere trovato su [Dac, Theorem 1.24]:

Teorema 1.2.10 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega} u(x)\psi(x) dx = 0, \text{ per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

allora $u=0$ q.o. in Ω .

Definizione 1.2.11. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si dice che $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la derivata parziale debole di u rispetto alla variabile x_i se è soddisfatta

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x)\partial_{x_i}\varphi(x) dx, \text{ per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Osservazione 1.2.12. Se la derivata parziale debole rispetto ad x_i di $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ esiste, allora è unica per il Teorema 1.2.10.

Osservazione 1.2.13. Se $u \in C^1(\Omega)$ allora le derivate parziali deboli esistono e coincidono con quelle classiche.

Definizione 1.2.14. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(a, b)$ come l'insieme delle $u \in L^p(a, b)$ che ammettono derivata prima debole $u' \in L^p(a, b)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. $W^{1,p}(a, b)$ è normato da

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\{\|u\|_{L^\infty} + \|u'\|_{L^\infty}\} \quad \text{se } p = \infty.$$

Definizione 1.2.15. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Si definisce lo spazio $W^{k,p}(a, b)$ come l'insieme delle $u \in L^p(a, b)$ che ammettono derivate deboli $u^{(i)} \in L^p(a, b)$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Questo spazio è normato da

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{i=0}^k \|u^{(i)}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il seguente teorema si trova su [Dac, Theorem 1.34]:

Teorema 1.2.16. Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora:

- (i) $W^{k,p}(a, b)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.
- (ii) se $p < \infty$ allora $C^\infty(a, b) \cap W^{k,p}(a, b)$ è denso in $W^{k,p}(a, b)$, cioè se $u \in W^{k,p}(a, b)$ esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(a, b) \cap W^{k,p}(a, b)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

Teorema 1.2.17 ([Bre, Teorema VIII.7]). Si consideri l'intervallo (a, b) , eventualmente coincidente con tutto \mathbb{R} . Se $1 \leq p \leq \infty$, esiste una costante C che dipende solo dall'intervallo, tale che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \quad \text{per ogni } u \in W^{1,p}(a, b)$$

cioè

$$W^{1,p}(a, b) \subset L^\infty(a, b).$$

Inoltre se (a, b) è limitato e $p \geq 1$,

$$W^{1,p}(a, b) \subset C[a, b].$$

Notazione. Se (a, b) è un intervallo limitato, indichiamo con $W_{per}^{1,p}(a, b)$ l'insieme delle funzioni in $W^{1,p}$ periodiche:

$$W_{per}^{1,p}(a, b) = \{u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = u(b)\}.$$

1.3 Richiami di analisi reale

Introduciamo uno degli oggetti principali della nostra discussione: le curve nel piano. Per un riferimento si veda [Giu, Cap. 15, 16]. Una curva piana è una applicazione continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Indichiamo le funzioni componenti con $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Se $u, v \in C^1[a, b]$ la curva γ si dice differenziabile e la sua lunghezza è data da

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dove $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)}$ è il modulo vettore tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$. La curva γ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e si dice semplice se l'applicazione $\gamma(t)$ è iniettiva in (a, b) . Se consideriamo una curva differenziabile γ semplice e chiusa il cui sostegno $\gamma([a, b])$ sia la frontiera di un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, per le formule di Green abbiamo che l'area di Ω si esprime come

$$A(\Omega) = \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Diamo ora dei risultati sulle serie di Fourier che sono reperibili su [Giu, Cap. 14]. Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T , cioè tale che $f(x) = f(x + T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f\left(\frac{Tx}{2}\right)$ è periodica di periodo 2. Dunque non è restrittivo considerare funzioni definite sull'intervallo $[-1, 1]$ periodiche.

Definizione 1.3.1. Sia $f \in L^1(-1, 1)$. Si chiama serie di Fourier associata ad f la somma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)],$$

dove i coefficienti sono detti coefficienti di Fourier di f e sono definiti

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Lemma 1.3.2 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $f \in L^2(-1, 1)$ e siano a_n e b_n i suoi coefficienti di Fourier. Allora vale la disuguaglianza*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx.$$

Consideriamo una successione di funzioni $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f_n converge puntualmente ad f se per ogni fissato $x \in [a, b]$ si ottiene che $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Diciamo che f_n converge uniformemente ad f in $[a, b]$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Si dice che una serie di funzioni $\sum f_n(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ converge puntualmente (risp. uniformemente) ad una funzione f se converge puntualmente (risp. uniformemente) la successione delle somme parziali; si dice che converge totalmente se è convergente la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)|.$$

La convergenza totale implica quella uniforme e quella uniforme implica quella puntuale (cfr. [Giu, Cap. 13]).

Teorema 1.3.3 (Convergenza uniforme serie di Fourier). *Sia $f \in C^1[-1, 1]$ periodica e siano a_n e b_n i suoi coefficienti di Fourier. Allora la serie di Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)) \quad (1.3.1)$$

converge totalmente in $[-1, 1]$. Il limite della (1.3.1) è proprio la f .

Teorema 1.3.4 (Identità di Parseval). *Se $f \in C^1[-1, 1]$ periodica, la disuguaglianza di Bessel diventa una uguaglianza*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx,$$

detta identità di Parseval.

1.4 Richiami di variabile complessa

In questo paragrafo sono contenuti tutti i richiami di teoria delle funzioni di variabile complessa che saranno necessari in seguito, e in particolare nel Paragrafo 2.2. Cominciamo con le notazioni di base:

Notazione. Sia $z \in \mathbb{C}$,

- (i) $Re(z)$ e $Im(z)$ indicano rispettivamente la parte reale e immaginaria del complesso z che si scriverà come $z = a + ib$ dove $a = Re(z)$, $b = Im(z)$.
- (ii) se $z = a + ib$, il suo complesso coniugato è $\bar{z} = a - ib$.
- (iii) il suo modulo è definito come $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ ed è una norma su \mathbb{C} .
- (iv) se $w \in \mathbb{C}$ la loro distanza è $d(z, w) = |z - w|$.

L'insieme \mathbb{C} è uno spazio topologico con la topologia indotta dalla distanza euclidea definita in (iv).

Definizione 1.4.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sottoinsieme,

- (i) Ω si chiama regione, o dominio, se è aperto e connesso.
- (ii) Ω è semplicemente connesso se è connesso per archi ed ha gruppo fondamentale banale.

Definizione 1.4.2 (Funzione analitica). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione. Una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice analitica in Ω se è differenziabile, cioè se esiste finito il limite

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

per ogni $a \in \Omega$. Si dice che f è analitica nel punto $a \in \Omega$ se esiste un intorno di a tutto contenuto in Ω in cui la f è analitica.

Le funzioni analitiche hanno moltissime proprietà, che diventano evidenti nel momento in cui si studia il comportamento dell'integrale di una funzione analitica su di una curva differenziabile. Una curva differenziabile è una mappa continua

$$\gamma: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

con derivata prima continua.

Definizione 1.4.3. Sia Ω una regione e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva differenziabile. Si definisce integrale di f su γ il numero complesso

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Si ha il seguente notevole teorema di Cauchy (cfr. [Ahl, Chap. 4.4]).

Teorema 1.4.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni $\gamma \subseteq \Omega$ curva differenziabile e chiusa.

La prima conseguenza del teorema di Cauchy è la formula integrale di Cauchy:

Teorema 1.4.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regione e sia f analitica in Ω . Se $\gamma \subset \Omega$ è una curva chiusa, e $z \in \Omega \setminus \gamma$ allora vale la formula di rappresentazione*

$$n(z, \gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

dove

$$n(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

è l'indice della curva γ rispetto al punto z .

Si dimostra inoltre ([Ahl, Chap. 4, Lemma 3]) che se f è continua su γ allora la funzione

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

è a sua volta analitica nelle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Proposizione 1.4.6. *Sia $n \in \mathbb{Z}$, allora vale*

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 2\pi\delta_{n=0} = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $n = 0$ è banale. Sia quindi $n \neq 0$. Consideriamo la curva chiusa $\Gamma(t) = e^{int}$ con $t \in [0, 2\pi]$, cioè la circonferenza unitaria percorsa n volte in senso antiorario se $n > 0$, oppure $|n|$ volte in senso orario se $n < 0$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{1}{ni} \int_{\Gamma} 1 dz = 0$$

applicando il Corollario 1.4.4 alla funzione analitica $f \equiv 1$. \square

Altri risultati per le funzioni analitiche sono raccolti nel seguente Teorema, e possono essere trovati nel Capitolo 3 di [Ahl].

Teorema 1.4.7. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora valgono le seguenti proprietà:*

(i) *se f non è identicamente nulla, i suoi zeri sono punti isolati. Ovvero se $z_0 \in \Omega$ è tale che $f(z_0) = 0$, esiste un intorno $B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in B(z_0, \varepsilon)$. La sua contronominale è quindi: se gli zeri di f si accumulano in Ω allora la f è identicamente nulla. Da questo segue il principio di identità delle funzioni analitiche: se $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitica è tale che $f = g$ su di una successione di punti che si accumula in Ω allora $f \equiv g$ in Ω .*

(ii) *se f è un omeomorfismo di Ω in $f(\Omega)$ allora anche l'inversa f^{-1} è una funzione analitica.*

(iii) *se f è non costante in Ω allora è una mappa aperta.*

(iv) *f è un omeomorfismo di Ω in $f(\Omega)$ se e solo se $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.*

(v) *f' è a sua volta una funzione analitica in Ω e di conseguenza $f^{(n)}$ è analitica in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

(vi) *se f' non è mai nulla in Ω , esistono rami analitici in Ω del logaritmo e della radice di f , cioè esistono due funzioni $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tali che*

$$e^{g(z)} = f(z), \quad h^2(z) = f(z), \quad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Consideriamo ora le serie di numeri complessi. Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ è una successione di numeri complessi si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (1.4.1)$$

converge assolutamente se converge la serie reale dei moduli

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Se una serie converge assolutamente allora converge anche semplicemente, dato che parte reale e parte immaginaria della serie (1.4.1) sono serie numeriche reali. Consideriamo ora la successione di funzioni complesse $\{f_n\}$ definite in un dominio Ω comune. Si dice che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in Ω se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Un caso particolare di successioni di funzioni complesse sono le serie di potenze per le quali vale il seguente teorema (cfr. [Ahl, Chap. 2, Sec. 2.4]).

Teorema 1.4.8 (Teorema di Abel). *Sia $\{a_n\}$ una successione complessa e consideriamo la serie di potenze di centro a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n. \quad (1.4.2)$$

Esiste un numero reale R , $0 \leq R \leq +\infty$, detto raggio di convergenza della serie, tale che

- (i) la serie (1.4.2) converge assolutamente per ogni z tale che $|z| < R$. Se ρ è tale che $0 \leq \rho < R$ la convergenza è uniforme nel disco $|z| \leq \rho$.*
- (ii) nel disco $|z| < R$ la serie converge ad una funzione analitica, la cui derivata può essere ottenuta derivando la serie termine a termine. Inoltre la serie ottenuta derivando termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza R .*

Per le funzioni analitiche vale il seguente teorema (cfr. [Con1, Theorem 2.8, Chap. 4]).

Teorema 1.4.9. *Sia Ω una regione ed $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitica. Se $a \in \Omega$, allora esiste un raggio $R > 0$, $R = d(a, \partial\Omega)$ tale che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n, \quad \text{per ogni } z \in B(a, R),$$

dove i coefficienti sono

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Vediamo ora due teoremi sul prodotto di serie di potenze, reperibili su [Con1, Chap. 3.1].

Teorema 1.4.10. *Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie complesse assolutamente convergenti. La serie prodotto è assolutamente convergente e converge alla somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right),$$

dove i c_n sono dati da

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Teorema 1.4.11. *Siano $\sum a_n(z - a)^n$ e $\sum b_n(z - a)^n$ due serie di potenze complesse con raggio di convergenza almeno R . Allora la serie prodotto converge alla somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n \right),$$

con raggio di convergenza almeno R , dove i c_n sono

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Diciamo che due regioni di \mathbb{C} sono conformemente equivalenti se esiste un omeomorfismo analitico tra le due. Il teorema della mappa di Riemann ci dice che in \mathbb{C} le classi di regioni conformemente equivalenti sono solo due: tutto il piano, e il disco unitario aperto D . Il teorema può essere trovato ad esempio su [Con1, Theorem 4.2, Chap. 7].

Teorema 1.4.12 (Teorema della mappa di Riemann). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regione semplicemente connessa, che non sia tutto \mathbb{C} . Sia $a \in \Omega$. Allora esiste un unico omeomorfismo analitico*

$$f: \Omega \rightarrow D$$

tale che $f(a) = 0$ e che $f'(a) > 0$. La f si dice mappa di Riemann.

Per quanto riguarda le aree di domini di \mathbb{C} abbiamo il seguente teorema (cfr. [Con2, Theorem 2.12]).

Teorema 1.4.13. *Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ domini, tali che esiste un omeomorfismo analitico $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$. Allora l'area di Ω_2 vale*

$$A(\Omega_2) = \iint_{\Omega_1} |f'(z)|^2 dz.$$

Definizione 1.4.14 (*TLF*). Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. L'applicazione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

si dice trasformazione lineare fratta, abbreviato in *TLF*.

Se introduciamo il punto all'infinito al piano \mathbb{C} otteniamo il piano proiettivo complesso

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

anche detto sfera di Riemann. Su \mathbb{C}_∞ viene introdotta una distanza (vedi ad esempio [Ahl, pp. 18-20]) rispetto alla quale è uno spazio topologico completo e compatto. Se consideriamo la proiezione stereografica fatta rispetto ad un punto N della sfera di Riemann, si vede che qualsiasi cerchio sulla sfera che non passi per N viene proiettato in un cerchio del piano complesso; invece un cerchio della sfera passante per N , viene proiettato in una retta del piano. Quindi quando si parla di cerchi in \mathbb{C}_∞ si sta parlando di cerchi, oppure di rette nel piano complesso. Indichiamo con $\{TLF\}$ l'insieme di tutte le trasformazioni lineari fratte. Vale il seguente teorema (cfr. [Ahl, Theorem 14, Chap. 3]).

Teorema 1.4.15. *Una TLF porta cerchi di \mathbb{C}_∞ in cerchi di \mathbb{C}_∞ .*

Chiudiamo questo paragrafo di richiami con una disuguaglianza che ci tornerà utile, che può essere trovata su [Ahl, pp. 10-11].

Proposizione 1.4.16 (Disuguaglianza di Cauchy). *Siano*

$$a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}.$$

Allora vale la disuguaglianza

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i b_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=0}^n |a_i|^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n |b_i|^2 \right).$$

L'uguaglianza vale se e solo se gli a_i e i \bar{b}_i sono proporzionali tra di loro, cioè se esiste un $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $a_i = \lambda \bar{b}_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Corollario 1.4.17. *Siano $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, allora vale la disuguaglianza*

$$\left| \sum_{i=0}^n z_i z_{n-i} \right|^2 \leq (n+1) \sum_{i=0}^n |z_i|^2 |z_{n-i}|^2.$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se gli addendi della somma a sinistra sono tutti uguali tra di loro, cioè se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che

$$z_i z_{n-i} = \lambda,$$

per ogni $i = 0, \dots, n$.

Dimostrazione. Se scegliamo gli a_i della Proposizione 1.4.16 come $a_i = z_i z_{n-i}$ e i b_i come $b_i = 1$, per ogni $i = 0, \dots, n$, otteniamo la tesi. \square

1.5 Estensione delle mappe di Riemann

Sia Ω un dominio di \mathbb{C} e sia $f: D \rightarrow \Omega$ una mappa di Riemann. Il problema che ci poniamo è quello di estendere la f oltre il disco D mantenendo la proprietà di essere un omeomorfismo analitico. Per procedere in questo senso occorre fare delle ipotesi su Ω . Cominciamo con alcune definizioni.

Definizione 1.5.1 (Curva di Jordan). Una curva del piano γ si dice curva di Jordan se è chiusa e semplice.

Per questo tipo di curve vale il seguente teorema:

Teorema 1.5.2 (Teorema della curva di Jordan). *Se $\gamma \subset \mathbb{C}$ è una curva di Jordan, allora $\mathbb{C} \setminus \gamma$ è unione di due componenti connesse, ciascuna delle quali avente γ come frontiera.*

Per una dimostrazione di questo risultato rimandiamo per esempio a [Con2, Chap. 13.1, Theorem 1.3]. Il Teorema della curva ci dà la possibilità di definire un dominio di Jordan:

Definizione 1.5.3. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice dominio di Jordan se il suo bordo è una curva di Jordan e se Ω non contiene ∞ , cioè se è limitato.

In particolare, segue che un dominio di Jordan è semplicemente connesso. Infatti per i semplicemente connessi del piano, una delle tante caratterizzazioni (cfr. [Con1, Chap. 8, Theorem 2.2]) è la seguente:

Teorema 1.5.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Ω è semplicemente connesso se e solo se il suo complementare nella sfera di Riemann $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ è connesso.*

Dunque se Ω è un dominio di Jordan, il suo complementare è la chiusura di un connesso e pertanto è connesso; quindi lo è anche in \mathbb{C}_∞ , e allora Ω è semplicemente connesso.

Per i domini di Jordan vale il seguente teorema.

Teorema 1.5.5 ([Con2, Theorem 5.6]). *Sia Ω un dominio semplicemente connesso diverso da \mathbb{C} e sia $f: D \rightarrow \Omega$ una mappa di Riemann. Allora f si estende ad un omeomorfismo di \bar{D} in $\bar{\Omega}$ se e solo se $\partial\Omega$ è una curva di Jordan.*

La dimostrazione di questo teorema è molto laboriosa, e non può essere fatta con i soli strumenti forniti fin'ora. Tutto il procedimento può essere trovato nel Capitolo 14 di [Con2].

Vediamo cosa ci dice il teorema appena enunciato. Se γ è una curva di Jordan, indichiamo con Ω il relativo dominio di Jordan. Dato che Ω è semplicemente connesso, ed è limitato, per il teorema della mappa di Riemann (Teorema 1.4.12) esiste un omeomorfismo analitico $f: D \rightarrow \Omega$, che si estende

ad un omeomorfismo di \bar{D} in $\bar{\Omega}$. Quindi in particolare f è un omeomorfismo di ∂D in $\partial\Omega = \gamma$, e la curva γ è parametrizzata da $\gamma(t) = f(e^{it})$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Tuttavia questo non basta. Vogliamo infatti che l'estensione sia un omeomorfismo analitico. Cominciamo con il vedere come si fa ad estendere delle funzioni analitiche. Dobbiamo prima indagare come si possono attaccare due funzioni analitiche in regioni che abbiano una parte di frontiera in comune. Come abbiamo detto nel punto (i) del Teorema 1.4.7, se Ω è una regione ed $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sono funzioni analitiche che coincidono su una successione di punti che si accumula in Ω , allora coincidono su tutto Ω . A maggior ragione questo è vero se f e g coincidono su di una curva contenuta in Ω . In realtà è sufficiente che f e g siano solo continue sulla curva, come si vede nel seguente teorema.

Teorema 1.5.6. *Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ domini disgiunti tali che $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ sia una curva rettificabile Γ . Sia f analitica su Ω_1 e continua su $\Gamma \cup \Omega_1$, e g analitica su Ω_2 e continua su $\Gamma \cup \Omega_2$. Supponiamo che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in \Gamma$. Allora la funzione*

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{se } z \in \Omega_1 \cup \Gamma, \\ g(z), & \text{se } z \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

è ben definita e analitica su $\Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$.

Per poter procedere alla dimostrazione, è necessaria una versione più forte del Teorema di Cauchy 1.4.4.

Teorema 1.5.7. *Sia $\gamma \in \mathbb{C}$ una curva di Jordan, e sia Ω il relativo dominio di Jordan. Se f è analitica in Ω e continua su $\gamma \cup \Omega$, allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Inoltre vale la formula di rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni $z \in \Omega$.

Nella formula di rappresentazione non compare $n(z, \gamma)$ perché è uguale ad 1. Un riferimento per il precedente teorema è ad esempio l'articolo di [Bec].

Possiamo ora procedere alla dimostrazione del Teorema 1.5.6.

Dimostrazione Teorema 1.5.6. Dobbiamo provare che la funzione F sia analitica in $\Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Per costruzione è analitica in Ω_1 e Ω_2 ; bisogna vedere che è analitica su Γ . Consideriamo quindi un punto $z_0 \in \Gamma$. Scegliamo due archi di Jordan $C_1 \subset \Omega_1$ e $C_2 \subset \Omega_2$ tali che abbiano i punti finali in comune su Γ , e tali che $C = C_1 \cup C_2$ sia una curva di Jordan che racchiude z_0 . Chiamiamo γ il tratto di curva individuato su Γ e Ω_1^* , Ω_2^* i domini racchiusi dalle curve di Jordan $J_1 = C_1 \cup \gamma$, $J_2 = C_2 \cup \gamma$ rispettivamente (si veda la Figura 1.1).

Possiamo applicare il Teorema 1.5.7 alla f sulla curva J_1 ed ottenere che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{se } z \in \Omega_1^*, \\ 0, & \text{se } z \in \Omega_2^*. \end{cases}$$

L'ultimo integrale è nullo al di fuori di $\overline{\Omega_1^*}$ perchè in questo caso $n(z, J_1) = 0$.

Analogamente si ottiene per la g :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} g(z), & \text{se } z \in \Omega_2^*, \\ 0, & \text{se } z \in \Omega_1^*. \end{cases}$$

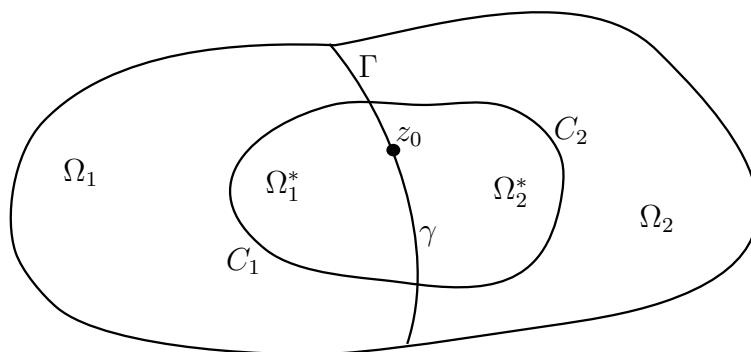


Figura 1.1: Teorema 1.5.6

Per come abbiamo definito la F , nell'insieme $\Omega_1^* \cup \Omega_2^*$ si ha la rappresentazione

$$\begin{aligned}
F(z) &= \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega_1^* \\ g(z) & \text{se } z \in \Omega_2^* \end{cases} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma^-} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è una funzione analitica su $\Omega_1^* \cup \gamma \cup \Omega_2^*$ visto che F è continua su C . Quindi anche F è analitica in tale regione, e in particolare è analitica in z_0 . \square

Il prossimo teorema è solo un caso particolare di tutta una serie di teoremi noti con il nome di principio di riflessione di Schwarz. L'idea di fondo del principio di riflessione è l'osservazione che una funzione f è analitica se e solo se $\overline{f(\bar{z})}$ è analitica. Questo suggerisce un modo di estendere una funzione analitica. Un risultato simile si trova ad esempio su [Ahl].

Teorema 1.5.8 (Principio di riflessione di Schwarz). *Sia $a \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R}$. Consideriamo un $r > 0$ e definiamo gli insiemi*

$$\begin{aligned}
A^+ &:= B(a, r) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}, \\
A &:= B(a, r) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}, \\
A^- &:= B(a, r) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}.
\end{aligned}$$

Sia f è analitica su A^+ , continua su $A^+ \cup A$ e tale che $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in A$. Se definiamo $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ in A^- , otteniamo un'estensione di f analitica in tutto $B(a, r)$.

Dimostrazione. Osserviamo che in tal modo il prolungamento è ben definito, perché la f assume valori reali su A . Dato che la funzione $\overline{f(\bar{z})}$ è analitica in A^- , dal Teorema 1.5.6 segue la tesi. \square

A questo punto siamo pronti a dimostrare un teorema di prolungamento delle mappe di Riemann al di fuori del disco D . Diamo prima la definizione di curva analitica.

Definizione 1.5.9. Una curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ si dice analitica se ammette una parametrizzazione $z: [a, b] \rightarrow \gamma$ tale che per ogni $t_0 \in (a, b)$ esistono un $\delta > 0$ e una successione $\{a_n\}$ tali che

$$z(t) = z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n,$$

per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Teorema 1.5.10. Siano Ω_1, Ω_2 regioni di \mathbb{C} e sia $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un omeomorfismo analitico. Supponiamo che $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ contengano rispettivamente le curve analitiche γ_1 e γ_2 , e che f si estenda ad un omeomorfismo di γ_1 in γ_2 . Allora f si estende ad un omeomorfismo analitico in un intorno di γ_1 .

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di γ_1 : dobbiamo vedere che la f si estende ad un omeomorfismo analitico in un suo intorno. La γ_1 è una curva analitica, per cui ammette una parametrizzazione analitica, cioè esistono una $\varphi: [a, b] \rightarrow \gamma_1$ e un $\delta > 0$ tali che

$$\varphi(t) = z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n, \text{ per ogni } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \quad (1.5.2)$$

A meno di traslare la parametrizzazione di γ_1 , possiamo supporre che $a_1 \neq 0$, cioè che $\varphi'(t_0) \neq 0$. Per il teorema di Abel (Teorema 1.4.8) la serie (1.5.2) converge uniformemente nel disco

$$B = \{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| < \delta\}$$

ad una funzione analitica. Quindi la φ si estende ad una funzione analitica in B e dunque anche la φ' è analitica in B . Le funzioni analitiche hanno zeri isolati (Teorema 1.4.7 punto (i)) e allora, visto che $\varphi'(t_0) \neq 0$, a meno di restringere B possiamo supporre che $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in B$, da cui segue che φ è un omeomorfismo analitico di B in un intorno di z_0 .

Consideriamo ora $w_0 = f(z_0)$. Dato che γ_2 è una curva analitica, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\psi(s) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (s - s_0)^n, \text{ per ogni } s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$$

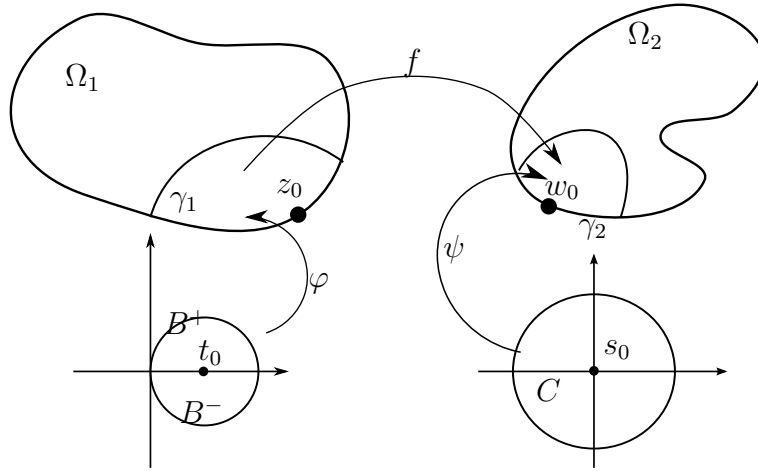


Figura 1.2: Teorema 1.5.10

e possiamo supporre che $b_1 \neq 0$, cioè che $\psi'(s_0) \neq 0$. Per gli stessi argomenti utilizzati con la φ , la ψ si estende ad un omeomorfismo analitico nel disco $C = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < \varepsilon\}$. La situazione è riassunta in Figura 1.2.

Con la stessa notazione della dimostrazione del principio di riflessione, indichiamo con B^+ la metà superiore di B e con B^- quella inferiore. Una tra B^+ e B^- viene mappato da φ all'interno di Ω_1 : supponiamo che sia B^+ . Allora la funzione $F := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ è analitica in B^+ , continua e a valori reali in $B \cap \mathbb{R}$. Ne segue che

$$F(z) = \begin{cases} (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z), & \text{se } z \in B \setminus B^-, \\ \overline{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\bar{z})}, & \text{se } z \in B^- \end{cases} \quad (1.5.3)$$

è analitica in tutto B per il principio di riflessione. Si conclude quindi che in tutto un intorno di z_0 la f è analitica perché composizione di funzioni analitiche.

Consideriamo di nuovo la funzione F . Se $z \in B^+$, allora

$$F'(z) = (\psi^{-1})'(f(\varphi(z)))f'(\varphi(z))\varphi'(z) \neq 0,$$

dato che è un prodotto di derivate di omeomorfismi analitici, che non si annullano mai. Allora anche F è un omeomorfismo analitico in B^+ . Se $z \in B^-$ vale lo stesso conto. Se infine $z \in B \cap \mathbb{R}$, la F è un omeomorfismo perché

composizione di omeomorfismi. Questo dimostra che la F è un omeomorfismo analitico in B , e dunque dato che $f = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, anche lei è un omeomorfismo analitico. \square

Abbiamo il seguente Corollario.

Teorema 1.5.11. *Sia γ una curva di Jordan analitica, e sia Ω il relativo dominio di Jordan. Denotiamo con $f: D \rightarrow \Omega$ un omeomorfismo analitico. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che la f si estende ad un omeomorfismo analitico di D_ρ in Ω' , dove $D_\rho = B(0, 1 + \rho)$ e $\Omega \subset \Omega'$.*

Dimostrazione. La f si estende ad un omeomorfismo di \bar{D} in $\bar{\Omega}$ per il Teorema 1.5.5, dato che Ω è un dominio di Jordan. Essendo poi il bordo di Ω e di D una curve analitiche, il teorema precedente ci fornisce la tesi. \square

1.6 Elementi di analisi convessa

In questo paragrafo definiremo gli elementi di base dell'analisi convessa indagando le loro relazioni. Per tutti i risultati o le definizioni che non hanno un rimando esplicito alla bibliografia, si possono consultare le opere di Webster ([Web]) e Schneider ([Sch]).

Definizione 1.6.1 (Insieme convesso). Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, il segmento che congiunge x ad y è tutto contenuto in A , ovvero se

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

Definizione 1.6.2 (Corpo convesso). Un corpo convesso è un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ compatto, convesso e ad interno non vuoto.

Ad esempio un disco pieno è un corpo convesso in \mathbb{R}^2 ma non lo è in \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.6.3 (Combinazione convessa). Siano $x, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Il punto x è detto combinazione convessa dei punti a_1, \dots, a_k se esistono

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$$

tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ e che $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$.

Proposizione 1.6.4. *Valgono le seguenti proprietà.*

(i) *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso e $\lambda \geq 0$, allora λA è convesso.*

(ii) *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se e solo se contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti.*

(iii) *L'intersezione arbitraria di insiemi convessi è un insieme convesso.*

Dimostrazione. (i) Siano $x, y \in \lambda A$, allora esistono $x', y' \in A$ tali che $x = \lambda x'$ e $y = \lambda y'$. Sia ora $\mu \in [0, 1]$ e consideriamo il punto $z := (1 - \mu)x + \mu y$: dobbiamo vedere che $z \in \lambda A$. Ma $z = \lambda[(1 - \mu)x' + \mu y'] \in \lambda A$, perché A è convesso e quindi $(1 - \mu)x' + \mu y' \in A$.

(ii) Se A contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti, in particolare contiene quella di due punti, e quindi è convesso. Viceversa, supponiamo che A sia convesso. Dobbiamo far vedere che se $a_1, \dots, a_k \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ sono tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, allora $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in A$. Lo proviamo per induzione su k . Se $k = 1$, l'affermazione è banale. Supponiamo ora che sia vero per $k - 1$ e mostriamolo per k . Almeno uno dei λ_i deve essere strettamente minore di 1 (altrimenti siamo nel caso banale): diciamo che $\lambda_k < 1$. Definiamo allora $\lambda := 1 - \lambda_k$ in modo che $\lambda > 0$ e

$$y := \frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda} a_{k-1}.$$

Per ipotesi induttiva $y \in A$, dato che la somma dei coefficienti è 1. Ma allora

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \lambda y + \lambda_k a_k \in A$$

perché $\lambda + \lambda_k = 1$ e A è convesso.

(iii) Banale. □

Definizione 1.6.5. Sia $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo l'iperpiano ortogonale ad u come

$$H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \alpha\}$$

e i relativi semispazi come

$$H_{u,\alpha}^- := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \alpha\},$$

$$H_{u,\alpha}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}.$$

Esempio 1.6.6. (i) Le sfere sono convesse. Consideriamo infatti un punto $a \in \mathbb{R}^n$, un raggio $r > 0$ e la sfera $B(a, r)$. Siano $x, y \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$ e $z := (1 - \lambda)x + \lambda y$. Dobbiamo vedere che $z \in B(a, r)$ e dunque dobbiamo stimarne la distanza da a . Poiché $x, y \in B(a, r)$ allora $\|x - a\|^2 \leq r^2$ e $\|y - a\|^2 \leq r^2$. Vale inoltre $z - a = (1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)$ e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} \|z - a\|^2 &= \langle z - a, z - a \rangle \\ &= (1 - \lambda)^2 \|x - a\|^2 + \lambda^2 \|y - a\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \langle x - a, y - a \rangle \\ &\leq (1 - \lambda)^2 r^2 + \lambda^2 r^2 + 2\lambda(1 - \lambda) r^2 = r^2. \end{aligned}$$

Questo prova che $z \in B(a, r)$ e conclude la dimostrazione.

(ii) Gli iperpiani e i semispazi sono insiemi convessi. Consideriamo infatti il vettore non nullo $u \in \mathbb{R}^n$ e lo scalare α . Se $x, y \in H_{u, \alpha}$ e $\lambda \in [0, 1]$, definiamo $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Allora vale

$$\langle z, u \rangle = (1 - \lambda) \langle x, u \rangle + \lambda \langle y, u \rangle = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha$$

e quindi $z \in A$. Il fatto che i semispazi sono convessi si prova analogamente.

Introduciamo ora la nozione di convessificato di un insieme.

Definizione 1.6.7. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, si chiama convessificato di A , o involucro convesso, il più piccolo insieme convesso che contiene A . Equivalentemente, il convessificato di A è l'intersezione di tutti i convessi che contengono A , e si indica

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convesso} \\ A \subset C}} C.$$

Teorema 1.6.8. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora*

(i) *conv(A) coincide con l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di A.*

(ii) *A è convesso se e solo se conv(A) = A.*

(iii) *se A compatto, anche conv(A) è compatto.*

Dimostrazione. (i) Sia X l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di A . Per la Proposizione 1.6.4 abbiamo che un insieme è convesso se e solo se contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti. Dato che $\text{conv}(A)$ è convesso, allora contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti. Per definizione $A \subset \text{conv}(A)$ e quindi $X \subset \text{conv}(A)$. Viceversa, per il punto (iii) della Proposizione 1.6.4 l'insieme X è convesso. Quindi, poiché $X \supseteq A$, dalla definizione di $\text{conv}(A)$ segue l'inclusione $\text{conv}(A) \subset X$.

(ii) Se A è convesso, allora banalmente $\text{conv}(A) = A$. Viceversa, supponiamo che $\text{conv}(A) = A$. Per il punto (i), l'insieme $\text{conv}(A)$, e quindi A , contiene tutte le combinazioni convesse dei punti di A . Per la Proposizione 1.6.4 (ii) segue la convessità di A .

(iii) Non lo dimostriamo perché troppo laborioso. Un riferimento è [Web, Theorem 2.2.6]. \square

Esempio 1.6.9. Vediamo due esempi di inviluppo convesso.

- (i) Consideriamo l'insieme $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$. Allora $\text{conv}(\{x, y\})$ è il segmento che congiunge i due punti.
- (ii) L'inviluppo convesso di tre punti distinti e non allineati nel piano è il triangolo avente come vertici i punti.

Teorema 1.6.10 (Proiezione). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso chiuso e non vuoto, e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste unico un punto $y_0 \in A$ tale che*

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|, \text{ per ogni } y \in A.$$

Inoltre

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \text{ per ogni } y \in A.$$

Dimostrazione. Dato che A è non vuoto, esiste un $r > 0$ tale che

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definiamo l'insieme compatto $X = \overline{B(x, r)} \cap A$, e consideriamo la funzione continua $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(y) = \|x - y\|$. Dato che X è compatto, la f assume minimo al suo interno, ovvero esiste un $y_0 \in X$ tale che $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ per ogni $y \in X$. Per costruzione il punto y_0 è un minimo per

f in tutto A , infatti se $y \in A \setminus X$ abbiamo che $\|x - y\| > r$, e quindi $\|x - y_0\| \leq r < \|x - y\|$.

Consideriamo ora un punto $y \in A$ e i punti del segmento che congiunge y_0 ad y , che indichiamo con $P(\lambda) = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y$. Per la convessità di A abbiamo che $P(\lambda) \in A$ per ogni $\lambda \in (0, 1]$ e quindi $\|x - y_0\| \leq \|x - P(\lambda)\|$. Abbiamo allora

$$\|x - P(\lambda)\|^2 = \|(x - y_0) + \lambda(y_0 - y)\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$$

e quindi

$$\lambda\|y_0 - y\|^2 + 2\langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \text{ per ogni } \lambda \in (0, 1].$$

Se passiamo al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$ in quest'ultima otteniamo

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0,$$

che vale per ogni $y \in A$ dato che la scelta era arbitraria.

Proviamo infine che il punto di minimo di f in A è unico. Supponiamo che $y_1 \in A$ sia un altro minimo, cioè sia tale che

$$\|x - y_1\| \leq \|x - y\|, \text{ per ogni } y \in A.$$

Allora valgono le due relazioni $\langle x - y_0, y_1 - y_0 \rangle \leq 0$ e $\langle x - y_1, y_0 - y_1 \rangle \leq 0$. Sommandole otteniamo che $\|y_1 - y_0\|^2 \leq 0$ e quindi $y_1 = y_0$. \square

Possiamo allora definire la proiezione.

Definizione 1.6.11. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso. Allora è ben definita la mappa di proiezione di un punto di \mathbb{R}^n su A , che indichiamo con $p: \mathbb{R}^n \rightarrow A$ ed è tale che

$$p(x) = \min_{y \in A} \|x - y\|.$$

Parliamo ora di separazione di due insiemi.

Definizione 1.6.12. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ e sia H un iperpiano di \mathbb{R}^n . Siano poi H^- e H^+ i semispazi chiusi individuati da H . Si dice che

- (i) H separa A e B se $A \subseteq H^-$ e $B \subseteq H^+$ o viceversa.

- (ii) H separa propriamente A e B se li separa e se almeno uno fra i due ha intersezione vuota con H .
- (iii) H separa strettamente A e B se $A \subset \text{Int}(H^-)$ e $B \subset \text{Int}(H^+)$ o viceversa.

Due insiemi di \mathbb{R}^n possono anche non essere separabili. Ad esempio non vi è modo di separare la sfera unitaria $B \subset \mathbb{R}^2$ dall'origine $\{0\}$.

Vediamo come sono concatenate le definizioni di separazione. Consideriamo $A, B, H \subset \mathbb{R}^n$ con H iperpiano di \mathbb{R}^n , allora valgono le implicazioni

$$\begin{aligned}
 H \text{ separa strettamente } A \text{ e } B &\implies H \text{ separa propriamente } A \text{ e } B \\
 &\implies H \text{ separa } A \text{ e } B.
 \end{aligned}$$

Non valgono le implicazioni inverse. Per esempio lo stesso iperpiano H separa H^- e H^+ ma non li separa propriamente. L'altro controesempio è dato dai due insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}, \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq \frac{1}{x} \right\},$$

che sono separati propriamente dall'iperpiano $\{x = 0\}$, ma non esiste alcun iperpiano che li separa strettamente.

Il seguente Teorema ci assicura delle ipotesi sufficienti per separare un insieme A da un punto nel suo complementare.

Teorema 1.6.13. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso, e sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Allora esiste un iperpiano di \mathbb{R}^n che separa strettamente gli insiemi A e $\{x\}$.*

Dimostrazione. Dato che A è non vuoto, chiuso e convesso, siamo nelle ipotesi del Teorema 1.6.10 e quindi esiste la proiezione di x su A , detta $p(x)$, con $p(x) \neq x$. Quello che dimostriamo è che l'iperpiano ortogonale al vettore $u := x - p(x)$ e passante per il punto medio del segmento che congiunge x a $p(x)$ separa A e $\{x\}$ strettamente. Infatti, per ogni $y \in A$ abbiamo

$$\langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$$

e allora

$$\begin{aligned}
\langle x - p(x), y \rangle &\leq \langle x - p(x), p(x) \rangle \\
&= \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|p(x)\|^2 - \|x - p(x)\|^2) \\
&< \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|p(x)\|^2) \\
&< \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2) \\
&= \langle x - p(x), x \rangle
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato che, se $c := \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|p(x)\|^2)$, allora $\langle u, y \rangle < c$, ovvero $A \subset \text{Int}(H_{u,c}^-)$ e $\langle u, x \rangle > c$, ovvero $\{x\} \subset \text{Int}(H_{u,c}^+)$. Dunque $H_{u,c}$ separa strettamente A e $\{x\}$. \square

Definizione 1.6.14. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme e H un iperpiano di \mathbb{R}^n . Se $x \in A$, diciamo che H supporta A in x se valgono

- (i) $A \cap H \neq \emptyset$,
- (ii) $A \subset H^-$ oppure $A \subset H^+$.

In tal caso chiamiamo H piano supporto di A , mentre H^- (oppure H^+) è detto semispazio supporto.

Se scegliamo un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ non nullo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'iperpiano $H_{u,\alpha}$ descrive una famiglia di iperpiani ortogonali al vettore u . In generale, esisteranno solo due valori di α tali che $H_{u,\alpha}$ supporta un insieme A (in Figura 1.3 sono α_1 e α_2). Solo uno di questi sarà tale che $A \subset H_{u,\alpha}^-$ (in Figura 1.3 è α_1).

Abbiamo che $A \subset H_{u,\alpha}^-$ se e solo se $\langle a, u \rangle \leq \alpha$ per ogni $a \in A$ e quindi se e solo se

$$\sup_{a \in A} \langle a, u \rangle \leq \alpha.$$

Se inoltre si richiede che $H_{u,\alpha}$ supporti A , è necessario che $A \cap H_{u,\alpha} \neq \emptyset$, e quindi che esista un $a_0 \in A$ tale che $\langle a_0, u \rangle = \alpha$.

Dunque $H_{u,\alpha}$ è un piano supporto per A se e solo se

$$\alpha = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle.$$

A questo punto possiamo definire la funzione supporto di un insieme.

Definizione 1.6.15 (Funzione supporto). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e limitato. La funzione supporto di A è $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(A, u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle .$$

Questa è una buona definizione. Infatti dato che A è un insieme limitato, esiste un $M > 0$ tale che $A \subset B(0, M)$, e quindi dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo che

$$|h(A, u)| = \sup_{a \in A} |\langle a, u \rangle| \leq \|u\| \sup_{a \in A} \|a\| \leq M\|u\|$$

cioè la h è ben definita.

Teorema 1.6.16. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e compatto. Allora scelto un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ non nullo, l'iperpiano $H_{u, h(u)}$ supporta A .*

Dimostrazione. Dato che A è compatto, allora è chiuso e limitato. Dalla limitatezza segue che h è ben definita. Inoltre per definizione di h abbiamo che

$$\langle a, u \rangle \leq h(u) , \text{ per ogni } a \in A$$

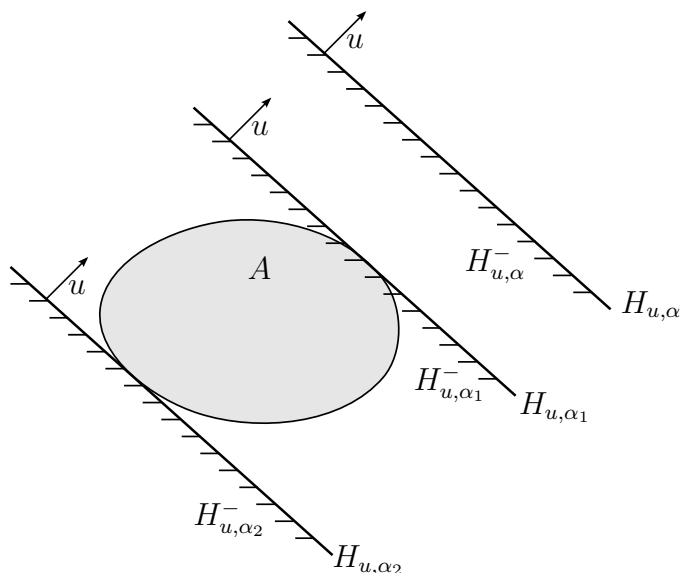


Figura 1.3: Iperpiani supporto

e quindi $A \subset H_{u,h(u)}^-$. Dobbiamo vedere che $H_{u,h(u)} \cap A \neq \emptyset$. La funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \langle x, u \rangle$ è continua, e quindi assume massimo sul compatto A , cioè esiste un $a_0 \in A$ tale che

$$\langle a_0, u \rangle = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = h(u)$$

per cui $a_0 \in A \cap H_{u,h(u)}$. □

La funzione supporto di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e compatto ci dà anche una informazione geometrica. Infatti il piano supporto $H_{u,h(u)}$ ha distanza pari a $\frac{|h(u)|}{\|u\|}$ dall'origine. Quindi, se u è un versore, $h(u)$ è la distanza con segno del piano supporto dall'origine. Se poi richiediamo che A sia anche convesso, otteniamo una sua caratterizzazione mediante la sua funzione supporto.

Teorema 1.6.17. *Sia A un insieme non vuoto, compatto e convesso. Allora A è individuato dalla sua funzione supporto, ovvero*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h(u), \text{ per ogni } u \in \mathbb{R}^n\}.$$

In particolare, due insiemi non vuoti, compatti e convessi aventi la stessa funzione supporto coincidono.

Dimostrazione. Definiamo

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h(u), \text{ per ogni } u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Se $a \in A$ e $u \in \mathbb{R}^n$, per definizione $\langle a, u \rangle \leq h(u)$, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, e quindi $a \in X$, provando che $A \subset X$.

Mostriamo che $X \subset A$, facendo vedere che se $x \notin A$ allora $x \notin X$. Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Per il Teorema 1.6.13, esiste un iperpiano $H_{u,\alpha}$ di \mathbb{R}^n che separa strettamente A ed $\{x\}$, ovvero tale che $A \subset \text{Int}(H_{u,\alpha}^-)$ e $x \in \text{Int}(H_{u,\alpha}^+)$. Quindi per ogni $a \in A$ vale

$$\langle a, u \rangle < \alpha < \langle x, u \rangle,$$

ovvero

$$h(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle < \langle x, u \rangle.$$

Abbiamo quindi mostrato che esiste un u tale che $\langle x, u \rangle > h(u)$, cioè che $x \notin X$. □

Dato che tutti e soli i piani supporto di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto, compatto e convesso, sono della forma $H_{u,h(u)}$, possiamo enunciare il precedente teorema nella forma:

Corollario 1.6.18. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto, compatto e convesso, allora A è intersezione dei suoi semispazi supporto.*

Passiamo adesso alle funzioni convesse.

Definizione 1.6.19 (Funzioni concave e convesse). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

La funzione f si dice concava in A se $-f$ è convessa in A .

Esempio 1.6.20. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto.

- (i) Se A è convesso, la sua funzione indicatrice χ_A è convessa.
- (ii) Se A è limitato, la sua funzione supporto è convessa. Infatti, siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e sia $\lambda \geq 0$. Allora

$$h(\lambda u) = \sup_{a \in A} \langle a, \lambda u \rangle = \lambda \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = \lambda h(u)$$

e anche

$$\begin{aligned} h(u + v) &= \sup_{a \in A} \langle u + v, a \rangle = \sup_{a \in A} (\langle u, a \rangle + \langle v, a \rangle) \\ &\leq \sup_{a \in A} \langle u, a \rangle + \sup_{a \in A} \langle v, a \rangle = h(u) + h(v). \end{aligned}$$

Per cui, se $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo che

$$h((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq h((1 - \lambda)u) + h(\lambda v) = (1 - \lambda)h(u) + \lambda h(v).$$

Da adesso fino alla fine del Paragrafo, daremo risultati che sono veri soltanto in dimensione 1. Il prossimo Teorema è noto come lemma delle tre corde. Facendo riferimento alla Figura 1.4, il teorema dice che dati tre punti sul grafico di una funzione convessa, e indicando con XY, XZ e ZY le rette che li congiungono, si ha che

$$\text{pendenza}(XZ) \leq \text{pendenza}(XY) \leq \text{pendenza}(ZY).$$

Teorema 1.6.21. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Se $x, y, z \in I$ sono tali che $x < z < y$, allora

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Dimostrazione. Esprimiamo z come combinazione convessa di x e y nel modo seguente:

$$z = \frac{y - z}{y - x}x + \frac{z - x}{y - x}y.$$

Per la convessità di f ,

$$f(z) \leq \frac{y - z}{y - x}f(x) + \frac{z - x}{y - x}f(y)$$

e quindi

$$f(z) - f(x) \leq \frac{z - x}{y - x}(f(y) - f(x)),$$

cioè

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente si prova l'altra disuguaglianza. □

Come Corollario di questo teorema abbiamo:

Teorema 1.6.22. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Se $a \in I$, la funzione $g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

è crescente in $I \setminus \{a\}$.

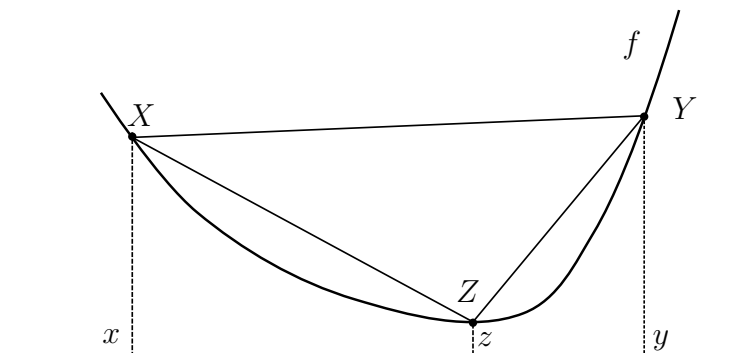


Figura 1.4: Lemma delle tre corde

Dimostrazione. Siano $b, c \in I \setminus \{a\}$ con $b < c$, dobbiamo mostrare che $g(b) \leq g(c)$. Abbiamo tre casi possibili: $b < c < a$, $b < a < c$ e $a < b < c$. Supponiamo che $b < c < a$, allora applicando il lemma delle tre corde con $x = b, y = a$ e $z = c$ otteniamo la tesi. Gli altri due casi sono analoghi. \square

Concludiamo il Paragrafo con alcune disuguaglianze legate alla convessità.

Teorema 1.6.23 (Disuguaglianza di Jensen). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Siano $x_1, \dots, x_k \in I$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Allora*

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k).$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su k . La base dell'induzione è la definizione di funzione convessa. Supponiamo poi che il Teorema sia vero per $k - 1$ e dimostriamolo per k . Per ipotesi abbiamo che $x_1, \dots, x_k \in I$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ con $\lambda_i \geq 0$. Almeno uno dei λ_i è più piccolo di 1, altrimenti siamo nel caso banale. A meno di riordinarli, supponiamo che sia $\lambda_k < 1$. Definiamo allora

$$\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} = 1 - \lambda_k,$$

in modo che $\lambda > 0$. Consideriamo poi il punto

$$y := \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda} x_{k-1}.$$

Applicando l'ipotesi induttiva abbiamo

$$f(y) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda} f(x_{k-1}).$$

Poiché $\lambda + \lambda_k = 1$, utilizzando l'ipotesi di convessità di f , concludiamo che

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) &= f(\lambda y + \lambda_k x_k) \\ &\leq \lambda f(y) + \lambda_k f(x_k) \\ &\leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

\square

Dalla disuguaglianza di Jensen segue la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica.

Teorema 1.6.24. Siano $x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ con $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

Allora

$$\prod_{n=1}^k x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n.$$

Dimostrazione. La funzione $-\log$ è convessa nel suo dominio. Allora dalla disuguaglianza di Jensen segue

$$\begin{aligned} -\log(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) &\leq -(\alpha_1 \log x_1 + \dots + \alpha_k \log x_k) \\ &= -\log(x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}). \end{aligned}$$

Dal fatto che \log è una funzione strettamente crescente segue la tesi. \square

Teorema 1.6.25. Siano $x, y, p > 0$ e $0 < \lambda < 1$, allora vale la disuguaglianza

$$[(1 - \lambda)x^p + \lambda y^p]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} \right] \geq 1. \quad (1.6.1)$$

Vale l'uguale in (1.6.1) se e solo se $x = y$.

Dimostrazione. Passando ai logaritmi la (1.6.1) equivale alla

$$\log \left([(1 - \lambda)x^p + \lambda y^p]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} \right] \right) \geq 0. \quad (1.6.2)$$

Svolgendo i conti e utilizzando la concavità del \log abbiamo

$$\begin{aligned} &\log \left([(1 - \lambda)x^p + \lambda y^p]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} \right] \right) \\ &= \frac{1}{p} \log [(1 - \lambda)x^p + \lambda y^p] + \log \left(\frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} \right) \\ &\geq \frac{1}{p} [(1 - \lambda) \log x^p + \lambda \log y^p] + (1 - \lambda) \log \frac{1}{x} + \lambda \log \frac{1}{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

che prova la (1.6.1).

Se $x = y$ allora banalmente vale l'uguaglianza in (1.6.1). Vediamo il viceversa. La funzione

$$f(x) = \log \left([(1 - \lambda)x^p + \lambda y^p]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} \right] \right)$$

è strettamente crescente, e quindi è iniettiva. Supponiamo che la (1.6.1) valga con l'uguale. Allora vale l'uguaglianza anche in (1.6.2), cioè $f(x) = 0$. Tuttavia abbiamo anche che $f(y) = 0$, dunque $f(x) = f(y)$ e dall'injectività concludiamo che $x = y$. \square

Capitolo 2

Il caso di dimensione $n = 2$

2.1 Introduzione

In questo Capitolo affronteremo la disuguaglianza isoperimetrica nel piano. L'enunciato che proveremo è il seguente.

“Qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ha una lunghezza non inferiore a quella della circonferenza di pari area.”

Formuliamo il problema sotto forma di disuguaglianza. Se indichiamo con C_γ la circonferenza con la stessa area di γ , stiamo dicendo che

$$L(\gamma) \geq L(C_\gamma).$$

Essendo C_γ una circonferenza di raggio $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, la sua lunghezza è

$$L(C_\gamma) = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

La disuguaglianza isoperimetrica è allora

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Daremo due dimostrazioni di questa disuguaglianza. La prima nel Paragrafo 2.2, che utilizza i metodi di variabile complessa. La seconda nel Paragrafo 2.3, dove la proveremo mediante la disuguaglianza di Wirtinger.

2.2 Dimostrazione con le tecniche di variabile complessa

In questo Paragrafo diamo una prima dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano utilizzando i metodi dell'analisi complessa. Per i richiami sulle definizioni fondamentali dell'argomento, laddove non specificati, rimandiamo al Paragrafo 1.4.

Consideriamo una curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ chiusa. Uno dei possibili modi di trattare la sua lunghezza L e l'area A che racchiude, è quello di passare attraverso il teorema della mappa di Riemann (Teorema 1.4.12). Se infatti γ è una curva semplice, cioè è una curva di Jordan, il dominio racchiuso Ω è semplicemente connesso. Il teorema della mappa ci assicura che tale dominio è conformemente equivalente al disco unitario aperto, ovvero esiste un omeomorfismo analitico

$$f : D \rightarrow \Omega.$$

L'idea consiste nell'esprimere L ed A in funzione di f' : così facendo, l'analiticità di f' ci permetterà di formulare la disuguaglianza isoperimetrica in una espressione equivalente, con il vantaggio che quest'ultima sarà elementare da provare. Per scrivere A in funzione di f' non c'è nessun problema. Le difficoltà nascono quando si vuole esprimere L . Infatti non vi è garanzia a priori che f sia analitica fin sul bordo di D . Per ovviare a questo problema ricorreremo ai risultati di estensione presentati nel Paragrafo 1.5. In particolare, ci servirà che f si estenda ad un omeomorfismo analitico in un insieme contenente D . Perché questo sia possibile siamo costretti a chiedere che Ω sia un dominio di Jordan che ha per frontiera una curva analitica.

Teorema 2.2.1 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio di Jordan la cui frontiera γ sia una curva analitica. Se L è la lunghezza di γ e A è l'area racchiusa al suo interno, vale la disuguaglianza isoperimetrica*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Vale l'uguaglianza in (2.2.1) se e solo se γ è una circonferenza.

Dimostrazione. Per il Teorema della mappa di Riemann, scelto un punto $a \in \Omega$, esiste unico l'omeomorfismo analitico $f : D \rightarrow \Omega$ tale che $f(0) = a$ ed

$f'(0) > 0$. Essendo Ω un dominio di Jordan, per il Teorema 1.5.5 la funzione f si estende ad un omeomorfismo di \bar{D} in $\bar{\Omega}$. Dunque la curva γ è immagine continua di ∂D tramite f , ovvero si parametrizza come

$$\gamma(t) = f(e^{it}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esprimiamo ora la lunghezza di γ in funzione di f' . Al momento la f è analitica in D , ma a noi serve una sua estensione analitica ad un dominio un po' più grande. Per questo motivo abbiamo fatto l'ipotesi che γ fosse una curva analitica: in tal modo possiamo applicare il Teorema 1.5.11. Esiste quindi un $\rho > 1$ tale che la f si estende ad un omeomorfismo analitico nell'insieme

$$D_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}.$$

A questo punto possiamo scrivere L come

$$L = \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})| dt.$$

La f è un omeomorfismo analitico in D_ρ e allora per il punto (iii) del Teorema 1.4.7 si ha che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in D_\rho$. Per il punto (v) del Teorema 1.4.7 f' è a sua volta una funzione analitica, e non si annulla mai, per cui (Teorema 1.4.7 punto (vi)) esiste un ramo analitico della radice quadrata di f' definito in D_ρ . Cioè esiste una funzione $\psi : D_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ analitica, tale che

$$\psi^2(z) = f'(z), \quad \text{per ogni } z \in D_\rho.$$

Poiché la ψ è analitica in D_ρ , si scrive in serie di potenze di centro l'origine e raggio di convergenza almeno ρ (vedi Teorema 1.4.9):

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad (2.2.2)$$

che converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto $\bar{D}_{\rho'}$ con $\rho' < \rho$. Per il teorema di Abel sulle serie di potenze (Teorema 1.4.8), si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})| dt = \int_0^{2\pi} |\psi(e^{it})|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \psi(e^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n e^{-int} \right) dt. \end{aligned}$$

Le due serie integrate convergono uniformemente in $[0, 2\pi]$, per cui possiamo applicare il Teorema 1.4.10, ottenendo che la serie prodotto converge uniformemente. Allora si possono scambiare serie e integrale, ottenendo

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \bar{a}_{n-k} e^{i(2k-n)t} \right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \bar{a}_{n-k} e^{i(2k-n)t} dt \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left(a_k \bar{a}_{n-k} \int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)t} dt \right) \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \bar{a}_{n-k} \delta_{k=n-k},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo applicato la Proposizione 1.4.6 con $2k - n$ al posto di n . Nell'ultima serie abbiamo che

$$\sum_{k=0}^n a_k \bar{a}_{n-k} \delta_{k=n-k} = \begin{cases} |a_{\frac{n}{2}}|^2, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi cambiando gli indici nella sommatoria esterna otteniamo

$$L = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2. \quad (2.2.3)$$

Vediamo ora come si esprime l'area A . Per farlo utilizziamo il Teorema 1.4.13 applicato ai domini D e Ω :

$$A = \iint_D |f'(z)|^2 dz.$$

Passando in coordinate polari e ricordando la definizione (2.2.2) di ψ otteniamo,

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r |f'(re^{i\theta})|^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r |\psi^2(re^{i\theta})|^2 dr d\theta.$$

Scriviamo la serie di ψ^2 :

$$\psi^2(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

dove i coefficienti sono

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n e^{in\theta} \right|^2 dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{c}_n r^n e^{-in\theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n c_k \bar{c}_{n-k} r^n e^{i(2k-n)\theta} d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

A questo punto, dato che la serie integrata converge uniformemente per in $[0, 2\pi]$, possiamo scambiare serie e integrale e svolgere conti analoghi a quelli fatti per L , ottenendo

$$A = 2\pi \int_0^1 r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} \right) dr = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|c_n|^2 \int_0^1 r^{2n+1} dr \right).$$

L'ultimo scambio di serie e integrale si può fare perché la serie integrata converge uniformemente in $[0, 1]$. Infatti $\sum |c_n|$ converge, e allora $|c_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi per n abbastanza grande vale la stima $|c_n|^2 < |c_n|$ e dal criterio del confronto ho la convergenza di $\sum |c_n|^2$. Dunque la serie integrata converge totalmente, e quindi uniformemente in $[0, 1]$.

Abbiamo ottenuto l'espressione:

$$A = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}. \quad (2.2.4)$$

Ricordando l'espressione (2.2.3) di L abbiamo

$$L^2 = 4\pi^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^2 = 4\pi^2 \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

dove i coefficienti b_n sono

$$b_n = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 |a_{n-k}|^2.$$

La disuguaglianza isoperimetrica (2.2.1) per γ equivale quindi alla

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n. \quad (2.2.5)$$

Per provarla è sufficiente far vedere che

$$\frac{|c_n|^2}{n+1} \leq b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Applicando il Corollario 1.4.17 agli a_i otteniamo

$$\begin{aligned} |c_n|^2 &= |a_0 a_n + \cdots + a_n a_0|^2 \\ &\leq (n+1)(|a_0|^2 |a_n|^2 + \cdots + |a_n|^2 |a_0|^2) = (n+1)b_n, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Passiamo alla dimostrazione dell'unicità. Osserviamo che, poiché la f è un omeomorfismo analitico in D_ρ , per il punto (iii) del Teorema 1.4.7, la sua derivata non si annulla mai, e in particolare

$$\psi^2(0) = f'(0) \neq 0,$$

ottenendo che $a_0 \neq 0$. Supponiamo ora che valga l'uguaglianza in (2.2.1). Allora vale anche in (2.2.5), e quindi

$$\frac{|c_n|^2}{n+1} = b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

che è vero se e solo se

$$|a_0 a_n + \cdots + a_n a_0|^2 = (n+1)(|a_0|^2 |a_n|^2 + \cdots + |a_n|^2 |a_0|^2),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di nuovo applicando il Corollario 1.4.17, otteniamo che l'ultima disuguaglianza è verificata se e solo se gli addendi della somma

$$a_0 a_n + \cdots + a_n a_0$$

sono tutti uguali tra di loro, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizziamo questa relazione. Per $n = 2$ si ottiene $a_0 a_2 = a_1 a_1$ e quindi

$$a_2 = \frac{a_1^2}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 a_0 = a_0 q^2,$$

dove $q := \frac{a_1}{a_0}$. Procedendo per induzione, si prova che

$$a_n = a_0 q^n,$$

cioè la ψ è una serie geometrica, la cui somma è

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 (qz)^n = \frac{a_0}{(1 - qz)}.$$

Otteniamo quindi la rappresentazione di f'

$$f'(z) = \frac{a_0^2}{(1 - qz)^2},$$

la quale ci dice che f è una *TLF* in D_ρ . Il Teorema 1.4.15 afferma che le *TLF* portano cerchi di \mathbb{C}_∞ in cerchi di \mathbb{C}_∞ . Dato che ∂D è un cerchio, allora $\gamma = f(\partial D)$ è un cerchio di \mathbb{C}_∞ , ed essendo limitata, è escluso che sia una retta, per cui è un cerchio anche in \mathbb{C} . \square

2.3 La disuguaglianza di Wirtinger

In questo Paragrafo formuliamo il problema isoperimetrico da un punto di vista differente rispetto a quello precedente.

Consideriamo un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la cui frontiera sia parametrizzata dalla curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial\Omega$. Se $\gamma \in C^1[a, b]$, il perimetro e l'area di Ω si esprimono come (cfr. Paragrafo 1.3):

$$L(\Omega) = \int_a^b \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)} dt, \quad A(\Omega) = \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Dunque la disuguaglianza isoperimetrica per Ω si può enunciare in termini dei funzionali $L = L(u, v)$ e $A = A(u, v)$.

Nota. I funzionali L e A restano ben definiti anche richiedendo una regolarità minore per le funzioni u e v . Per esempio, se $u, v \in W^{1,1}(a, b)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |L| &\leq \int_a^b \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)} dt \leq \int_a^b |u'| dx + \int_a^b |v'| dx \\ &= \|u'\|_{L^1} + \|v'\|_{L^1} < +\infty \end{aligned}$$

e anche

$$|A| \leq \int_a^b |u||v'| \, dx \leq \|u\|_{L^\infty} \|v'\|_{L^1} < +\infty,$$

dato che $W^{1,1}(a, b) \subset L^\infty(a, b)$ (Teorema 1.2.17).

Guardando il problema in questa prospettiva arriviamo quindi ad una sua naturale generalizzazione a disuguaglianza analitica tra funzionali.

Teorema 2.3.1 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Siano $u, v \in W_{per}^{1,1}(a, b)$. Consideriamo i due funzionali*

$$L, A: W_{per}^{1,1}(a, b) \times W_{per}^{1,1}(a, b) \rightarrow \mathbb{R},$$

definiti da

$$L(u, v) = \int_a^b \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)} \, dt, \quad A(u, v) = \int_a^b uv' \, dx.$$

Allora è verificata la disuguaglianza isoperimetrica

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{2.3.1}$$

Se $u, v \in W_{per}^{1,1}(a, b) \cap C^1[a, b]$, vale l'uguaglianza in (2.3.1) se e solo se

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2, \tag{2.3.2}$$

per ogni $x \in [a, b]$, con $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ opportuni.

Naturalmente, se una curva γ è parametrizzata da u e v , questo Teorema implica la disuguaglianza isoperimetrica. Inoltre, la condizione in (2.3.2), esprime l'unicità delle curve che soddisfano la disuguaglianza con l'uguale.

A differenza del caso trattato nel Paragrafo 2.2, questa generalizzazione ci permette anche di trascurare l'ipotesi di curva semplice, interpretando il funzionale A come un'area contata con molteplicità in ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.

Per dimostrare il Teorema 2.3.1 utilizzeremo un'altra disuguaglianza analitica che prende il nome di disuguaglianza di Wirtinger.

Teorema 2.3.2 (Disuguaglianza di Wirtinger). *Consideriamo lo spazio delle funzioni in $W^{1,2}(-1, 1)$ periodiche ed a media nulla*

$$X = \left\{ u \in W_{per}^{1,2}(-1, 1) : \int_{-1}^1 u(x) dx = 0 \right\}.$$

Se la funzione $u \in X$, allora vale la disuguaglianza di Wirtinger

$$\int_{-1}^1 u'^2 dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u^2 dx. \quad (2.3.3)$$

Vale l'uguaglianza in (2.3.3) se e solo se

$$u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x), \quad (2.3.4)$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ opportuni.

Prima di procedere alla dimostrazione, osserviamo che la disuguaglianza (2.3.3) si generalizza per funzioni nello spazio

$$X_a^b = \left\{ u \in W_{per}^{1,2}(a, b) : \int_a^b u(x) dx = 0 \right\}$$

alla disuguaglianza

$$\int_a^b u'^2 dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a} \right)^2 \int_{-1}^1 u^2 dx.$$

Per provare che sono equivalenti è sufficiente utilizzare il diffeomorfismo $f: (a, b) \rightarrow (-1, 1)$, definito da

$$f(x) = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$$

e cambiare variabile negli integrali.

Passiamo ora alla dimostrazione, che dividiamo in due parti: prima dimostriamo la (2.3.3) nel caso di funzioni nello spazio $X \cap C^2[-1, 1]$ utilizzando i loro sviluppi in serie di Fourier; poi la generalizzeremo a tutte le funzioni in X , sfruttando un argomento di densità.

Dimostrazione.

Passo 1. Supponiamo che $u \in X \cap C^2[-1, 1]$. Per il Teorema 1.3.3 la u si scrive in serie di Fourier

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

e la convergenza è uniforme in $[-1, 1]$. Osserviamo che nella serie non c'è il termine corrispondente a $n = 0$ perché la u è a media nulla in $[-1, 1]$. Grazie alla convergenza uniforme della serie, possiamo scambiare serie e derivata, ottenendo

$$u'(x) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n [-a_n \sin(n\pi x) + b_n \cos(n\pi x)].$$

Per l'identità di Parseval (Teorema 1.3.4) abbiamo che le norme $L^2(-1, 1)$ di u e u' sono uguali alla somma dei quadrati dei rispettivi coefficienti di Fourier:

$$\int_{-1}^1 u^2 dx = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2 + b_i^2,$$

$$\int_{-1}^1 u'^2 dx = \pi^2 \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 (a_i^2 + b_i^2).$$

Quindi la (2.3.3) equivale alla disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (2.3.5)$$

che è banalmente verificata.

Passiamo alla condizione sull'uguaglianza. La (2.3.3) vale con l'uguale se e solo se vale con l'uguale la (2.3.5). Siccome le due serie sono a termini positivi, le loro somme risultano uguali se e solo se sono uguali termine a termine, da cui segue

$$a_n = b_n = 0, \text{ per ogni } n \geq 2$$

e quindi

$$u(x) = a_1 \cos(\pi x) + b_1 \sin(\pi x).$$

Passo 2. Sia ora $u \in X$. L'insieme $X \cap C^2[-1, 1]$ è denso in X , ovvero esiste una successione $\{u_n\} \in X \cap C^2[-1, 1]$ tale che $u_n \rightarrow u$ in norma

$W^{1,2}(-1, 1)$. Si ha allora che $u_n \rightarrow u$ e $u'_n \rightarrow u'$ in norma $L^2(-1, 1)$. Per la disuguaglianza triangolare abbiamo $\|u_n\|_{L^2} \rightarrow \|u\|_{L^2}$ e $\|u'_n\|_{L^2} \rightarrow \|u'\|_{L^2}$. Per il Passo precedente, la $\{u_n\}$ soddisfa la (2.3.3) per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero

$$\|u'_n\|_{L^2}^2 \geq \pi^2 \|u_n\|_{L^2}^2, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ in quest'ultima si ottiene la (2.3.3) per u .

Resta ora da mostrare che (2.3.3) vale con l'uguale se e solo se u è della forma (2.3.4). Se u è della forma (2.3.4) allora è C^2 e quindi abbiamo già mostrato che vale l'uguaglianza in (2.3.3). Viceversa, dimostreremo che se $u \in X$ soddisfa

$$\int_{-1}^1 u'^2 dx = \pi^2 \int_{-1}^1 u^2 dx$$

allora $u \in X \cap C^\infty[-1, 1]$ e quindi dal passo uno otteniamo la tesi. Consideriamo il funzionale

$$\Psi: X \rightarrow \mathbb{R},$$

definito da

$$\Psi(u) = \int_{-1}^1 u'^2 - \pi^2 u^2 dx.$$

Quello che abbiamo mostrato fin'ora è che

$$\inf \{\Psi(u) : u \in X\} = 0$$

e che le funzioni della forma (2.3.4) sono dei punti di minimo. Vogliamo provare che questi sono tutti e soli i punti di minimo di Ψ . Sia quindi u un punto di minimo per Ψ . Si ha che per ogni $v \in X \cap C_0^\infty[-1, 1]$ e per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione $u + \varepsilon v \in X \cap C_0^\infty[-1, 1]$. Quindi vale

$$\Psi(u) \leq \Psi(u + \varepsilon v). \tag{2.3.6}$$

Fissiamo $v \in X \cap C_0^\infty[-1, 1]$, e definiamo la funzione

$$\varphi(\varepsilon) := \Psi(u + \varepsilon v).$$

La (2.3.6) dice che la φ ha un minimo in 0 e allora dal Teorema di Fermat si ha $\varphi'(0) = 0$. Calcoliamo questa derivata. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\Psi(u + \varepsilon v) - \Psi(u) &= \int_{-1}^1 (u' + \varepsilon v')^2 - \pi^2(u + \varepsilon v)^2 - (u')^2 + \pi^2 u^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \cancel{u'^2} + \varepsilon^2 v'^2 + 2\varepsilon u'v' - \cancel{\pi^2 u^2} - \varepsilon^2 \pi^2 v^2 - 2\varepsilon \pi^2 uv - \cancel{u'^2} + \cancel{\pi^2 u^2} dx \\ &= \varepsilon \left[\varepsilon \int_{-1}^1 v'^2 - \pi^2 v^2 dx + 2 \int_{-1}^1 u'v' - \pi^2 uv dx \right],\end{aligned}$$

e allora la derivata vale

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(u + \varepsilon v) - \Psi(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-1}^1 v'^2 - \pi^2 v^2 dx + 2 \int_{-1}^1 u'v' - \pi^2 uv dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 u'v' - \pi^2 uv dx.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione integrale

$$\int_{-1}^1 u'v' - \pi^2 uv dx = 0, \quad \forall v \in X \cap C_0^\infty[-1, 1].$$

Scegliamo una $f \in C_0^\infty[-1, 1]$ tale che $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$ e sia $\varphi \in C_0^\infty[-1, 1]$ arbitraria. Allora la funzione

$$v(x) := \varphi(x) - \left(\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \right) f(x)$$

è in $X \cap C_0^\infty[-1, 1]$. Sia inoltre

$$\lambda = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 u'f' - \pi^2 uf dx.$$

Allora vale l'equazione

$$\int_{-1}^1 u'\varphi' - \pi^2(u - \lambda)\varphi dx = 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty[-1, 1], \quad (2.3.7)$$

infatti sostituendo i valori di φ e di λ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u' \varphi' - \pi^2(u - \lambda)\varphi &= \\
&= \int_{-1}^1 u' \left(v' + f' \int_{-1}^1 \varphi \right) - \pi^2 u \left(v + f \int_{-1}^1 \varphi \right) + \pi^2 \lambda \int_{-1}^1 \varphi \\
&= \int_{-1}^1 u' v' - \pi^2 u v + \int_{-1}^1 \varphi \int_{-1}^1 u' f' - \pi^2 u f + \pi^2 \lambda \int_{-1}^1 \varphi \\
&= \int_{-1}^1 \varphi \int_{-1}^1 u' f' - \pi^2 u f + \pi^2 \lambda \int_{-1}^1 \varphi = 0.
\end{aligned}$$

La (2.3.7) ci dice che

$$\int_{-1}^1 \pi^2(\lambda - u)\varphi \, dx = \int_{-1}^1 u' \varphi' \, dx, \text{ per ogni } \varphi \in C_0^\infty[-1, 1],$$

e dalla definizione di derivata debole prima di u

$$\int_{-1}^1 u' \varphi' \, dx = - \int_{-1}^1 u \varphi'' \, dx$$

si ottiene

$$\int_{-1}^1 \pi^2(\lambda - u)\varphi \, dx = - \int_{-1}^1 u \varphi'' \, dx, \text{ per ogni } \varphi \in C_0^\infty[-1, 1].$$

Poiché $u \in L^2(-1, 1)$, anche $\pi^2(\lambda - u) \in L^2(-1, 1)$ e quindi è la derivata debole seconda di u , ovvero $u \in W^{2,2}(-1, 1)$ e

$$u''(x) = \pi^2(\lambda - u(x)) \text{ q.o. in } (-1, 1). \quad (2.3.8)$$

L'intervallo $(-1, 1)$ è limitato, quindi per il Teorema 1.2.17 si ha l'inclusione $W^{1,2}(-1, 1) \subset C[-1, 1]$. Ma $W^{2,2}(-1, 1) \subset W^{1,2}(-1, 1)$ per cui la u è continua e quindi lo è anche la $\pi^2(\lambda - u)$. Quindi la (2.3.8) ci dice che $u'' \in C[-1, 1]$, cioè $u \in C^2[-1, 1]$. Iterando questo argomento otteniamo che $u \in C^\infty[-1, 1]$, completando la dimostrazione.

□

Corollario 2.3.3. *Se $u, v \in W_{per}^{1,2}(-1, 1)$, allora vale*

$$\int_{-1}^1 (u'^2 + v'^2) dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 uv' dx. \quad (2.3.9)$$

Vale l'uguaglianza in (2.3.9) se e solo se u e v soddisfano la condizione

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2, \quad (2.3.10)$$

per ogni $x \in [-1, 1]$, con $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ opportuni.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che se u e v soddisfano la (2.3.9), anche ogni loro traslazione la soddisfa. Infatti, consideriamo $a, b \in \mathbb{R}$ e sostituiamo $u + a$ e $v + b$ ad u e v rispettivamente nella (2.3.9). Quello che accade è che la disequazione che coinvolge $u + a$ e $v + b$ torna nella forma (2.3.9), che è quindi invariante per traslazioni. Allora ci basta dimostrarla per un solo rappresentante delle classi di funzioni $[u] = \{u + a : a \in \mathbb{R}\}$ e $[v] = \{v + a : a \in \mathbb{R}\}$. Scegliamo quindi u e v in modo che siano a media nulla

$$\int_{-1}^1 u dx = \int_{-1}^1 v dx = 0.$$

In questo modo ci siamo ricondotti al caso $u, v \in X$ e siamo nelle ipotesi del Teorema 2.3.2. Se portiamo tutto a sinistra nella (2.3.9) otteniamo

$$\int_{-1}^1 (u'^2 + v'^2) - 2\pi uv' dx \geq 0,$$

ed equivalentemente

$$\int_{-1}^1 (v' - \pi u)^2 dx + \int_{-1}^1 (u'^2 - \pi^2 u^2) dx \geq 0. \quad (2.3.11)$$

Il primo addendo della (2.3.11) è sempre non negativo perché integrale di una funzione non negativa, mentre il secondo lo è per il Teorema 2.3.2.

Esaminiamo ora quando vale l'uguaglianza. Abbiamo che vale se e solo se sono nulli entrambi gli addendi in (2.3.11). Poiché il primo integrale è la norma L^2 al quadrato della funzione $v' - \pi u$, vale

$$\int_{-1}^1 (v' - \pi u)^2 dx = 0 \iff v' = \pi u \text{ q.o. in } [-1, 1]$$

Invece il secondo addendo è nullo se e solo se

$$u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$$

e quindi integrando $v' = \pi u$ otteniamo

$$v(x) = \alpha \sin(\pi x) - \beta \cos(\pi x).$$

Se ora scegliamo opportunamente $u \in [u]$ e $v \in [v]$, otteniamo che soddisfano la relazione (2.3.10). \square

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare il Teorema 2.3.1. L'idea della dimostrazione è quella di utilizzare in una prima fase delle funzioni regolari, in modo da poter ottenere in modo diretto la (2.3.12) utilizzando il Corollario 2.3.3. Una volta stabilito questo si utilizza un argomento di densità, come abbiamo fatto nella dimostrazione della disuguaglianza di Wirtinger (Teorema 2.3.2).

Dimostrazione Teorema 2.3.1.

Passo 1. Supponiamo dapprima che $u, v \in W_{per}^{1,1}(a, b) \cap C^1[a, b]$. Non è restrittivo supporre che la curva sia regolare, cioè che il vettore tangente non si annulli mai:

$$u'^2(x) + v'^2(x) > 0, \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Nell'Osservazione 2.3.5 mostreremo come questa ipotesi aggiuntiva può essere rimossa. Consideriamo ora la funzione $\eta \in C^1[a, b]$ definita da

$$\eta(x) = -1 + \frac{2}{L} \int_a^x \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)} dt.$$

La η è strettamente crescente, infatti

$$\eta'(x) = \frac{2}{L} \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} > 0$$

e quindi è invertibile, cioè è un diffeomorfismo tra gli intervalli $[-1, 1]$ e $[a, b]$. Cambiamo la parametrizzazione di γ con

$$\gamma(y) = (\varphi(y), \psi(y)), \quad y \in [-1, 1],$$

dove

$$\begin{cases} \varphi(y) = u(\eta^{-1}(y)), \\ \psi(y) = v(\eta^{-1}(y)). \end{cases}$$

In tal modo φ e ψ sono funzioni $C^1[-1, 1]$ perché composizione di funzioni C^1 . Inoltre sono periodiche perché

$$\varphi(-1) = u(\eta^{-1}(-1)) = u(a) = u(b) = u(\eta^{-1}(1)) = \varphi(1).$$

Lo stesso conto vale anche per ψ . Infine dall'inclusione $C^1[-1, 1] \subset W^{1,2}(-1, 1)$ abbiamo che

$$\varphi, \psi \in W_{per}^{1,2}(-1, 1) \cap C^1[-1, 1].$$

Osserviamo anche che vale la relazione

$$\frac{L}{2} = \sqrt{\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)} \quad (2.3.12)$$

per ogni $y \in [-1, 1]$. Infatti:

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{d}{dy} [u(\eta^{-1}(y))] = u'(\eta^{-1}(y)) \frac{1}{\eta'(x)} \Big|_{x=\eta^{-1}(y)} \\ &= u'(\eta^{-1}(y)) \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{u'(\eta^{-1}(y))^2 + v'(\eta^{-1}(y))^2}}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\psi'(y) = v'(\eta^{-1}(y)) \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{u'(\eta^{-1}(y))^2 + v'(\eta^{-1}(y))^2}}.$$

Se ora si sommano i quadrati si trova la (2.3.12). Integrando quest'ultima tra -1 e 1 si ottiene

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)} dy = \left(2 \int_{-1}^1 (\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)) dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il Corollario 2.3.3 ci dice che

$$\int_{-1}^1 (\varphi'^2 + \psi'^2) dy \geq 2\pi \int_{-1}^1 \varphi\psi' dy \quad (2.3.13)$$

e allora

$$L^2 = 2 \int_{-1}^1 (\varphi'^2 + \psi'^2) dy \geq 4\pi \int_{-1}^1 \varphi\psi' dy = 4\pi A,$$

che stabilisce la (2.3.1).

Passiamo all'unicità. Abbiamo che sussiste l'uguaglianza

$$L^2 = 4\pi A$$

se e solo se vale con l'uguale la (2.3.13), e questo è vero (Corollario 2.3.3) se e solo se

$$(\varphi(y) - r_1)^2 + (\psi(y) - r_2)^2 = r_3^2, \text{ per ogni } y \in [-1, 1].$$

Se ricordiamo che $\varphi(y) = u(\eta^{-1}(y))$, $\psi(y) = v(\eta^{-1}(y))$ e $x = \eta^{-1}(y)$, ritroviamo la (2.3.2).

Passo 2. Supponiamo adesso che $u, v \in W_{per}^{1,1}(a, b)$. Per un argomento di densità posso trovare due successioni $\{u_n\}, \{v_n\} \in W_{per}^{1,1}(a, b) \cap C^1[a, b]$ tali che $u_n \rightarrow u$ e $v_n \rightarrow v$ in $W^{1,1}(a, b) \cap L^\infty(a, b)$. Se dimostriamo che

$$L(u_n, v_n) \rightarrow L(u, v) \quad \text{e} \quad A(u_n, v_n) \rightarrow A(u, v) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (2.3.14)$$

abbiamo finito. Infatti, per quanto dimostrato al Passo precedente, le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ soddisfano la (2.3.2), cioè vale

$$L^2(u_n, v_n) - 4\pi A(u_n, v_n) \geq 0, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite in quest'ultima otteniamo la tesi.

Resta quindi da provare l'affermazione (2.3.14). Dobbiamo far vedere che $L(u_n, v_n) \rightarrow L(u, v)$ in \mathbb{R} , quindi stimiamo la differenza $|L(u_n, v_n) - L(u, v)|$. Dall'hölderianità della radice quadrata otteniamo

$$\begin{aligned} |L(u_n, v_n) - L(u, v)| &= \left| \int_a^b \sqrt{u_n'^2 + v_n'^2} - \sqrt{u'^2 + v'^2} dx \right| \\ &\leq \int_a^b \sqrt{|u_n'^2 - u'^2 + v_n'^2 - v'^2|} dx \\ &\leq \int_a^b \sqrt{|u_n'^2 - u'^2|} dx + \int_{-1}^1 \sqrt{|v_n'^2 - v'^2|} dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

se $n \rightarrow +\infty$, perché i due integrali vanno a zero. Infatti se $\{f_n\} \in L^1(a, b)$ è tale che $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ allora si ha

$$\int_a^b \sqrt{|f_n^2 - f^2|} \, dx = \int_a^b \sqrt{|f_n - f|} \sqrt{|f_n + f|} \, dx$$

e utilizzando la disuguaglianza di Hölder con $p=2$ (Teorema 1.2.8),

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{|f_n^2 - f^2|} \, dx &\leq \left(\int_a^b |f_n - f| \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f_n + f| \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f_n - f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f_n + f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} (\|f_n\|_{L^1} + \|f\|_{L^1})^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se $n \rightarrow +\infty$, dal momento che $\|f_n\|_{L^1} \rightarrow \|f\|_{L^1}$.

Proviamo ora che $A(u_n, v_n) \rightarrow A(u, v)$. Stimiamone il modulo della differenza

$$\begin{aligned} |A(u_n, v_n) - A(u, v)| &\leq \int_a^b |u_n v_n' - u v'| \, dx \\ &= \int_a^b |u_n v_n' - u_n v' + u_n v' - u v'| \, dx \\ &\leq \int_a^b |u_n| |v_n' - v'| \, dx + \int_a^b |v'| |u_n - u| \, dx \\ &\leq \int_a^b \operatorname{ess\,sup}_{(a,b)} |u_n| |v_n' - v'| \, dx + \int_a^b \operatorname{ess\,sup}_{(a,b)} |v'| |u_n - u| \, dx \\ &= \|u_n\|_{L^\infty} \|v_n' - v'\|_{L^1} + \|v'\|_{L^\infty} \|u_n - u\|_{L^1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

perché $\|u_n\|_{L^\infty} \rightarrow \|u\|_{L^\infty}$, e quindi è limitata. \square

Nella dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica (Teorema 2.3.1) abbiamo fatto l'ipotesi che le funzioni $u, v \in W_{per}^{1,1}(a, b) \cap C^1[a, b]$ dovessero soddisfare a

$$u'^2(x) + v'^2(x) > 0, \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Nella prossima Osservazione 2.3.5 vedremo come rimuoverla. Prima però enunciamo un risultato di topologia che ci sarà utile.

Teorema 2.3.4 ([DB, Theorem 9, Chap. 1]). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto non vuoto. Allora A è unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.*

Osservazione 2.3.5. Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in [a, b] : u'^2(x) + v'^2(x) > 0\}.$$

A è aperto visto che è preimmagine tramite una funzione continua di un aperto. Il Teorema 2.3.4 ci dice che esistono

$$a \leq a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} \leq b, \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}$$

tali che

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i).$$

Se $a \leq \alpha < \beta \leq b$, definiamo

$$L(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} (u'^2 + v'^2) dx, \quad A(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} uv' dx.$$

Dato che in A^c si ha $u'^2(x) + v'^2(x) = 0$, e quindi $v'(x) = 0$, abbiamo che

$$L(b_i, a_{i+1}) = A(b_i, a_{i+1}) = 0, \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Per cui valgono

$$L = L(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} L(a_i, b_i), \quad (2.3.15)$$

$$A = A(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} A(a_i, b_i). \quad (2.3.16)$$

Poiché in ogni intervallo (a_i, b_i) non abbiamo problemi di annullamento del vettore tangente, possiamo definire un cambiamento di parametro come abbiamo fatto nella dimostrazione del Teorema 2.3.1, cioè

$$\eta(x) = -1 + 2 \frac{L(a, x)}{L(a, b)}$$

che è $C^1(a_i, b_i)$ e invertibile con inversa C^1 , per ogni $i \in \mathbb{N}$. Definiamo quindi la nuova parametrizzazione di γ :

$$\begin{cases} \varphi(y) = u(\eta^{-1}(y)), \\ \psi(y) = v(\eta^{-1}(y)). \end{cases}$$

Siano ora

$$\alpha_i = \eta(a_i) = -1 + 2 \frac{L(a, a_i)}{L(a, b)}, \quad \beta_i = \eta(b_i) = -1 + 2 \frac{L(a, b_i)}{L(a, b)},$$

per cui

$$\beta_i - \alpha_i = 2 \frac{L(a_i, b_i)}{L(a, b)}. \quad (2.3.17)$$

Inoltre, dal momento che $L(b_i, a_{i+1}) = 0$, si ha

$$\beta_i = \alpha_{i+1}.$$

Infatti

$$L(a, b_i) = L(a, b_i) + L(b_i, a_{i+1}) = L(a, a_{i+1}).$$

Questo ci assicura che gli intervalli $[\alpha_i, \beta_i]$ ricoprono tutto $[-1, 1]$, cioè

$$\sum_{i=1}^{+\infty} [\alpha_i, \beta_i] = [-1, 1].$$

Vale poi una relazione analoga a (2.3.12) che si trova con lo stesso conto

$$\frac{L(a_i, b_i)}{\beta_i - \alpha_i} = \frac{L(a, b)}{2} = \sqrt{\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)}$$

ed elevando al quadrato e integrando si ha:

$$(\beta_i - \alpha_i) \frac{L^2(a, b)}{4} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\varphi'^2 + \psi'^2) dy.$$

Se utilizziamo la (2.3.17) otteniamo

$$L(a_i, b_i) = \frac{2}{L(a, b)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\varphi'^2 + \psi'^2) dy.$$

Ricordando la (2.3.15) si ha

$$L(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} L(a_i, b_i) = \frac{2}{L(a, b)} \int_{-1}^1 (\varphi'^2 + \psi'^2) dy, \quad (2.3.18)$$

mentre per la (2.3.16) abbiamo che

$$A(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} A(a_i, b_i) = \int_{-1}^1 \varphi \psi' dy. \quad (2.3.19)$$

Osserviamo infine che φ e ψ sono periodiche in $[-1, 1]$ e che sono C^1 tranne che in una quantità al più numerabile di punti, cioè tali che $\varphi, \psi \in W_{per}^{1,2}(-1, 1)$ e quindi dal Corollario 2.3.3 applicato alle equazioni (2.3.18) e (2.3.19) otteniamo la (2.3.1).

Capitolo 3

Il caso di dimensione $n \geq 2$

3.1 Introduzione

In questo Capitolo ci occuperemo di dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica per un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. La situazione si rivela però ben più complicata di quella nel piano e sarà necessaria una disuguaglianza molto più forte della isoperimetrica: quella di Brunn-Minkowski. Questa ci permetterà di dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica per la classe dei sottoinsiemi compatti di \mathbb{R}^n .

Passeremo poi ad occuparci dell'unicità. Anche questa volta utilizzeremo la disuguaglianza di Brunn-Minkowski, alla quale affiancheremo una condizione di unicità. Sarà però necessaria una restrizione sulla classe di insiemi di \mathbb{R}^n da considerare.

Per il momento riferiamoci a delle nozioni intuitive di volume e di superficie di A , che indichiamo rispettivamente con $V(A)$ e $S(A)$. L'enunciato che andremo a dimostrare è il seguente:

“Qualsiasi insieme compatto $A \subset \mathbb{R}^n$ ha una superficie non inferiore a quella della sfera di pari volume.”

Quindi anche in dimensione alta la risposta al nostro problema di massimizzazione del volume a parità di superficie è la sfera. Formuliamo il problema sotto forma di disuguaglianza. Se indichiamo con B_A la sfera che ha

lo stesso volume di A allora stiamo dicendo che

$$S(A) \geq S(B_A).$$

Essendo B_A una sfera di raggio $r = \left(\frac{V(A)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$, la sua superficie vale

$$S(B_A) = n\omega_n^{\frac{1}{n}}[V(A)]^{\frac{n-1}{n}}.$$

La disuguaglianza isoperimetrica è allora

$$[S(A)]^n - n^n\omega_n[V(A)]^{n-1} \geq 0.$$

3.2 Definizioni

Il primo problema che sorge in dimensione alta è quello di definire i soggetti della disuguaglianza isoperimetrica: il volume dell'insieme A e la sua superficie. Definiamo $V(A)$ come la sua misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n . La questione è come definire la superficie $S(A)$. Questo problema sarà risolto alla fine del Paragrafo, con un definizione di superficie che a prima vista può sembrare del tutto arbitraria, ma che si rivelerà essere la scelta opportuna.

Cominciamo con il dare delle definizioni. Per i riferimenti, si veda il Capitolo 1, e in particolare il Paragrafo 1.6.

Definizione 3.2.1 (Somma di Minkowski). Dati due insiemi $A, C \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, si definisce la loro somma di Minkowski l'insieme

$$A + C = \{a + c : a \in A, c \in C\}.$$

Osservazione 3.2.2. Dati $A, C \subseteq \mathbb{R}^n$ possiamo scrivere la loro somma di Minkowski nel modo più espressivo

$$A + C = \bigcup_{c \in C} (A + c).$$

Questo ci dice che la somma di Minkowski è ricoperta da tutte le possibili traslazioni dell'insieme A tramite i vettori dell'insieme C .

Esempio 3.2.3. Vediamo come funziona la somma di Minkowski con alcuni esempi.

(i) Se $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ la loro somma di Minkowski è

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

(ii) Se $R, Q \subset \mathbb{R}^n$ sono dei plurirettangoli,

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad Q = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n],$$

allora

$$R + Q = [a_1 + c_1, b_1 + d_1] \times \cdots \times [a_n + c_n, b_n + d_n].$$

(iii) Se $r, s > 0$, allora $B_r + B_s = B_{r+s}$.

(iv) La somma di Minkowski di due poligoni può aumentarne il numero di lati. Ad esempio la somma di due triangoli può essere un triangolo, un quadrilatero, un pentagono oppure un esagono, come si vede in Figura 3.1.

(v) La somma di Minkowski può anche avere dimensione superiore a quella degli insiemi sommati. Per esempio, la somma di un disco un segmento può essere un cilindro, la somma di due segmenti un rettangolo e la somma di tre segmenti un parallelepipedo (Figura 3.2).

(vi) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è compatto ed $r > 0$, abbiamo definito A_r come l'intorno di A di raggio r . Si ha che A_r coincide con $A + rB$, ovvero

$$A + rB = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq r\}$$

(si veda la Figura 3.3). Proviamo questo fatto. Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq r\}$.

Se $x \in A + rB$ allora $x = a + y$ con $a \in A$ e $\|y\| \leq r$, per cui

$$d(x, A) = d(a + y, A) = \inf_{z \in A} \{\|a + y - z\|\}.$$

Si ha che

$$\|a + y - z\| \leq \|a - z\| + \|y\| \leq \|a - z\| + r, \quad \text{per ogni } z \in A$$

e quindi dato che $a \in A$,

$$d(x, A) \leq \inf_{z \in A} \{\|z - a\| + r\} = r,$$

ovvero $x \in X$. Viceversa se $x \in X$ allora $d(x, A) \leq r$, cioè

$$\|x - a\| \leq r, \text{ per ogni } a \in A.$$

Dato che A è compatto, esiste un $\bar{a} \in A$ tale che $\|x - \bar{a}\| \leq r$, per cui $x = (x - \bar{a}) + \bar{a}$ con $x - \bar{a} \in rB$.

(vii) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso allora

$$M + M = 2M.$$

Infatti se $x \in M + M$ allora esistono $m_1, m_2 \in M$ tali che $x = m_1 + m_2$. Ma M è convesso e allora $\frac{m_1 + m_2}{2} \in M$ ovvero $\frac{x}{2} \in M$ e quindi $x \in 2M$. Viceversa se $x \in 2M$ allora $\frac{x}{2} \in M$, e quindi $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \in M + M$.

(viii) Se rimuoviamo l'ipotesi di convessità su M , in generale si può dire solo che

$$2M \subset M + M.$$

Un controesempio in cui non vale l'inclusione opposta è mostrato in Figura 3.4.

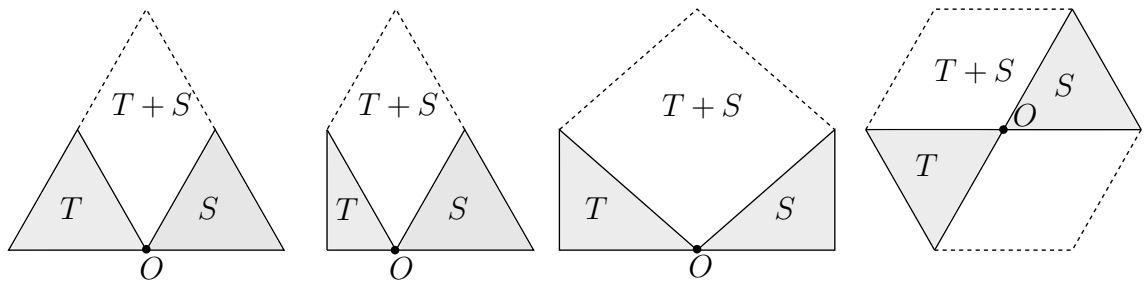


Figura 3.1: Somma di triangoli

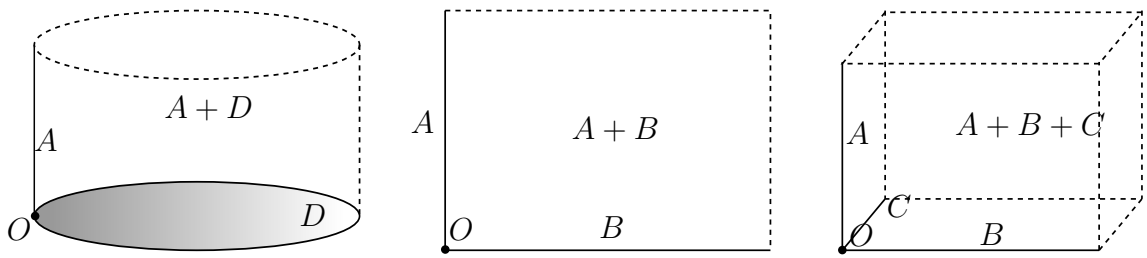


Figura 3.2: Somma di Minkowski e dimensione

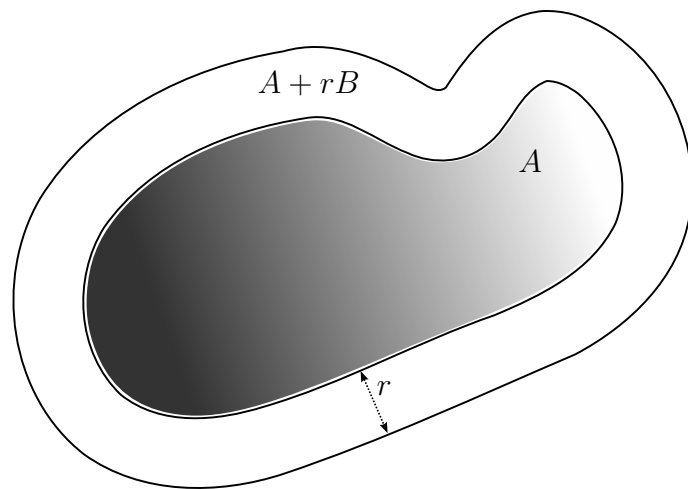


Figura 3.3: Intorno di A di raggio r

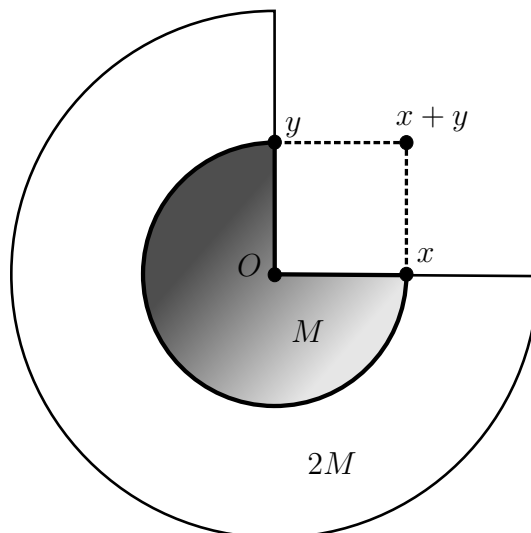


Figura 3.4: $M + M \not\subseteq 2M$

Vediamo ora alcune proprietà della somma di Minkowski.

Proposizione 3.2.4. *Valgono le seguenti proprietà.*

(i) *Se $A, C \subset \mathbb{R}^n$ sono convessi, anche $A + C$ è convesso.*

(ii) *Se $A, C \subset \mathbb{R}^n$ sono compatti, anche $A + C$ è compatto.*

(iii) *Se $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sono convessi (compatti) e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sono non nulli, allora l'insieme*

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$$

è convesso (compatto).

(iv) *Se $A_1, A_2, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$(A_1 + C_1) \cup (A_2 + C_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) + (C_1 \cup C_2).$$

(v) *Se $A_1, A_2, C \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$(A_1 \cup A_2) + C = (A_1 + C) \cup (A_2 + C).$$

Dimostrazione. (i) Supponiamo che A e C siano convessi. Siano $x, y \in A + C$, e $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ tali che $\lambda + \mu = 1$. Dobbiamo provare che $\lambda x + \mu y \in A + C$. Ma $x = a_1 + c_1, y = a_2 + c_2, a_1, a_2 \in A, c_1, c_2 \in C$. Quindi

$$\lambda x + \mu y = (\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda c_1 + \mu c_2)$$

e per la convessità di A e C si ha $\lambda a_1 + \mu a_2 \in A, \lambda c_1 + \mu c_2 \in C$, cioè $\lambda x + \mu y \in A + C$.

(ii) Poiché siamo in \mathbb{R}^n è sufficiente mostrare che l'insieme $A + C$ è compatto per successioni. Sia $\{x_n\} \subset A + C$ una successione: dobbiamo provare che ammette una estratta convergente ad un punto di $A + C$. Ma $x_n = a_n + c_n, a_n \in A, c_n \in C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi abbiamo le due successioni $\{a_n\} \subset A, \{c_n\} \subset C$. A è compatto, quindi esistono una estratta $\{a_{n_k}\}$ e un $a \in A$ tali che $a_{n_k} \rightarrow a$. Analogamente esistono un $c \in C$ e una estratta $\{c_{n_{k_j}}\}$ di $\{c_{n_k}\}$ tale che $c_{n_{k_j}} \rightarrow c$ per $j \rightarrow +\infty$. Quindi $x_{n_{k_j}} \rightarrow a + c$, e $a + c \in A + C$.

(iii) Se gli A_i sono convessi, allora $\lambda_i A_i$ è convesso per il punto (i) della Proposizione 1.6.4. Quindi se A, B sono convessi, anche $\lambda A + \mu B$ è convesso. Per induzione segue la tesi. Supponiamo invece che gli A_i siano compatti. Possiamo procedere analogamente: l'unica cosa che dobbiamo mostrare è che λA è compatto se A è compatto. Supponiamo che $\{x_n\} \subset \lambda A$, allora per ogni $n \in N$ esiste un $x'_n \in A$ tale che $x_n = \lambda x'_n$. Essendo $\{x'_n\} \subset A$ che è compatto, allora ha una estratta $\{x'_{n_j}\}$ convergente a un punto $x \in A$, per cui anche $\{x_{n_j}\}$ converge a $\lambda x \in \lambda A$.

(iv) Supponiamo che $x \in (A_1 + C_1) \cup (A_2 + C_2)$. Se $x \in A_1 + C_1$ allora $x = a_1 + c_1$, con $a_1 \in A_1$ e $c_1 \in C_1$. Quindi $a_1 \in A_1 \cup A_2$ e $c_1 \in C_1 \cup C_2$, cioè $x \in (A_1 \cup A_2) + (C_1 \cup C_2)$. Analogamente si dimostra se $x \in A_2 + C_2$.

(v) Questa è banale. □

Esempio 3.2.5. Consideriamo il rettangolo $Q \subset \mathbb{R}^2$,

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

e il suo intorno $Q + \varepsilon B$ (si veda la Figura 3.5). Calcoliamo $V(Q + \varepsilon B)$. Dato che Q è compatto, per quanto detto nell'Esempio 3.2.3 al punto (vi), abbiamo che

$$Q + \varepsilon B = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, Q) \leq \varepsilon\}.$$

Come si vede nella scomposizione di Figura 3.6, si ha

$$V(Q + \varepsilon B) = V(Q) + 2(a + b)\varepsilon + V(B)\varepsilon^2.$$

Abbiamo ottenuto un polinomio di secondo grado in ε . Il coefficiente del termine di grado uno è la superficie di Q , e possiamo scrivere

$$S(Q) + \varepsilon V(B) = \frac{V(Q + \varepsilon B) - V(Q)}{\varepsilon}.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ otteniamo

$$S(Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(Q + \varepsilon B) - V(Q)}{\varepsilon}.$$

Esempio 3.2.6. Ripetiamo lo stesso esempio in \mathbb{R}^3 . Consideriamo un parallelepipedo

$$R = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$$

e calcoliamo $V(R + \varepsilon B)$ (si veda la Figura 3.7). Come prima, abbiamo che

$$R + \varepsilon B = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, R) \leq \varepsilon\}$$

e allora, come si vede dalla Figura 3.8,

$$V(R + \varepsilon B) = V(R) + 2(ab + bc + ac)\varepsilon + \pi(a + b + c)\varepsilon^2 + V(B)\varepsilon^3.$$

Anche questa volta abbiamo ottenuto un polinomio in ε , che ora è di terzo grado. Il coefficiente del termine di grado uno è ancora la superficie di R , cioè si può scrivere

$$S(R) + \pi(a + b + c)\varepsilon + V(B)\varepsilon^2 = \frac{V(R + \varepsilon B) - V(R)}{\varepsilon}$$

e passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ottiene

$$S(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(R + \varepsilon B) - V(R)}{\varepsilon}.$$

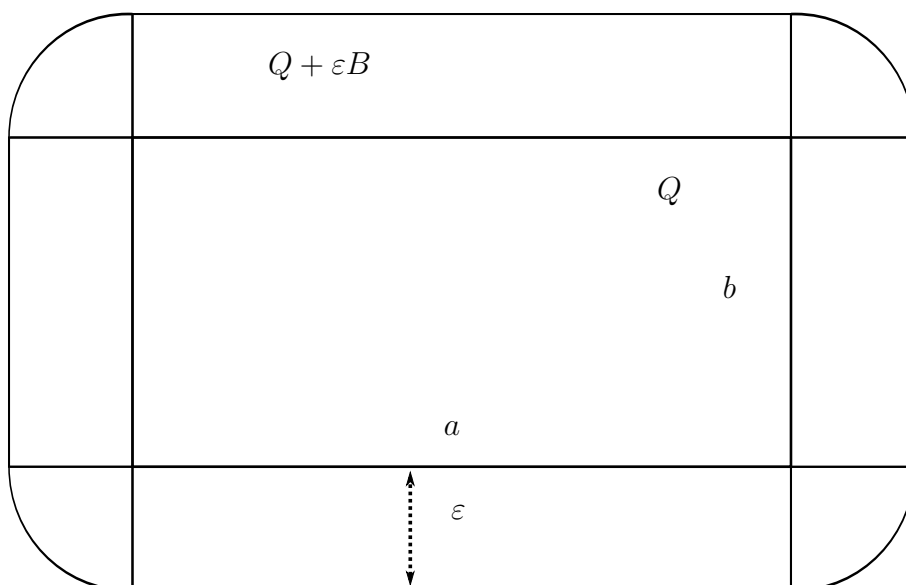


Figura 3.5: $Q + \varepsilon B$

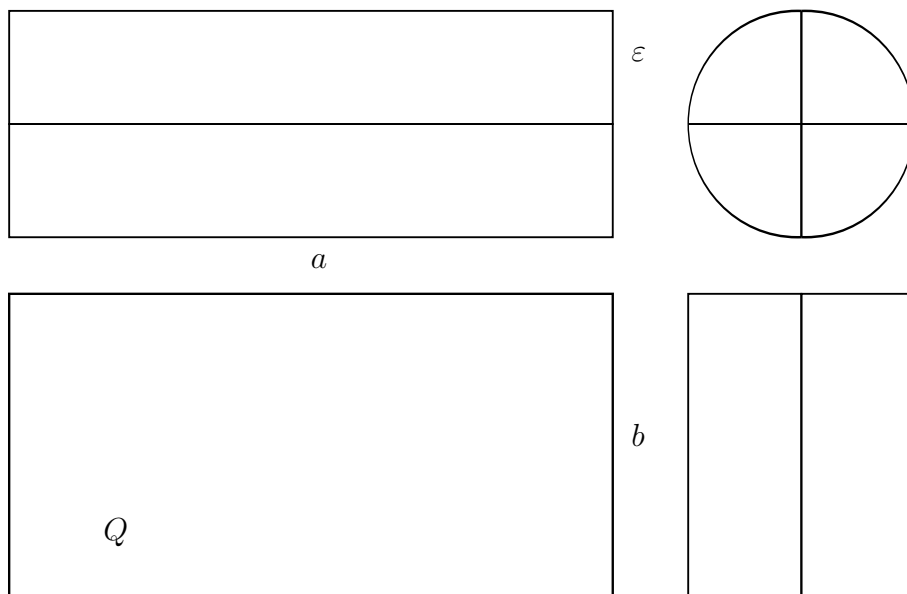


Figura 3.6: $Q + \varepsilon B$ scomposto

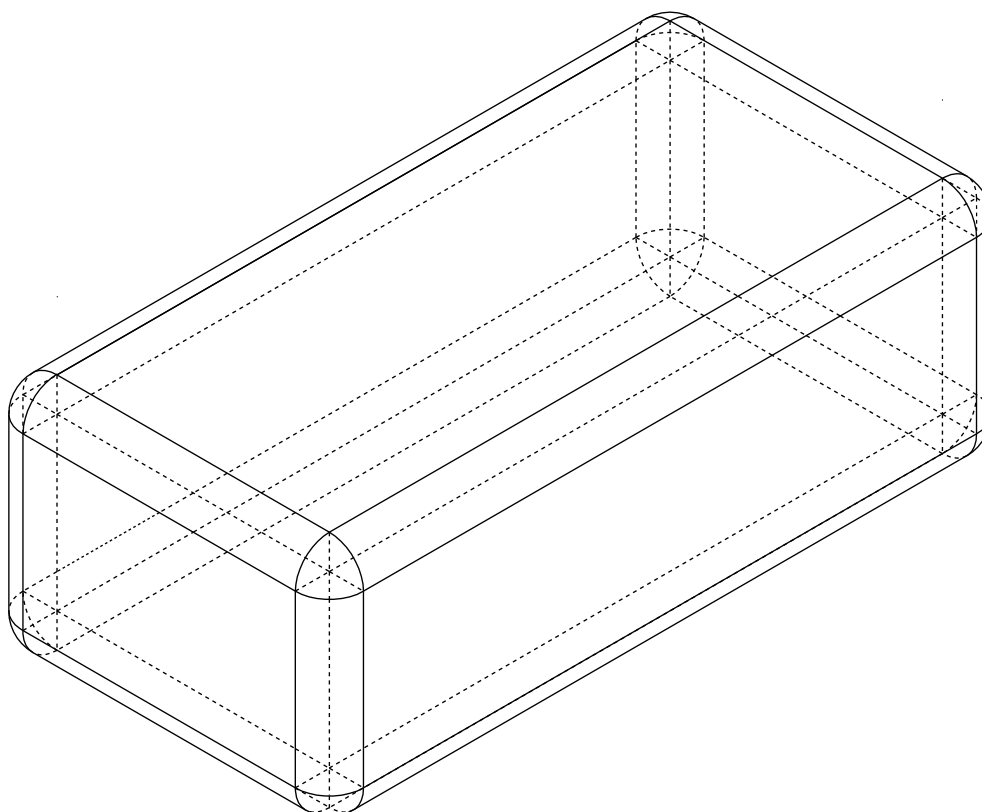


Figura 3.7: $R + \varepsilon B$

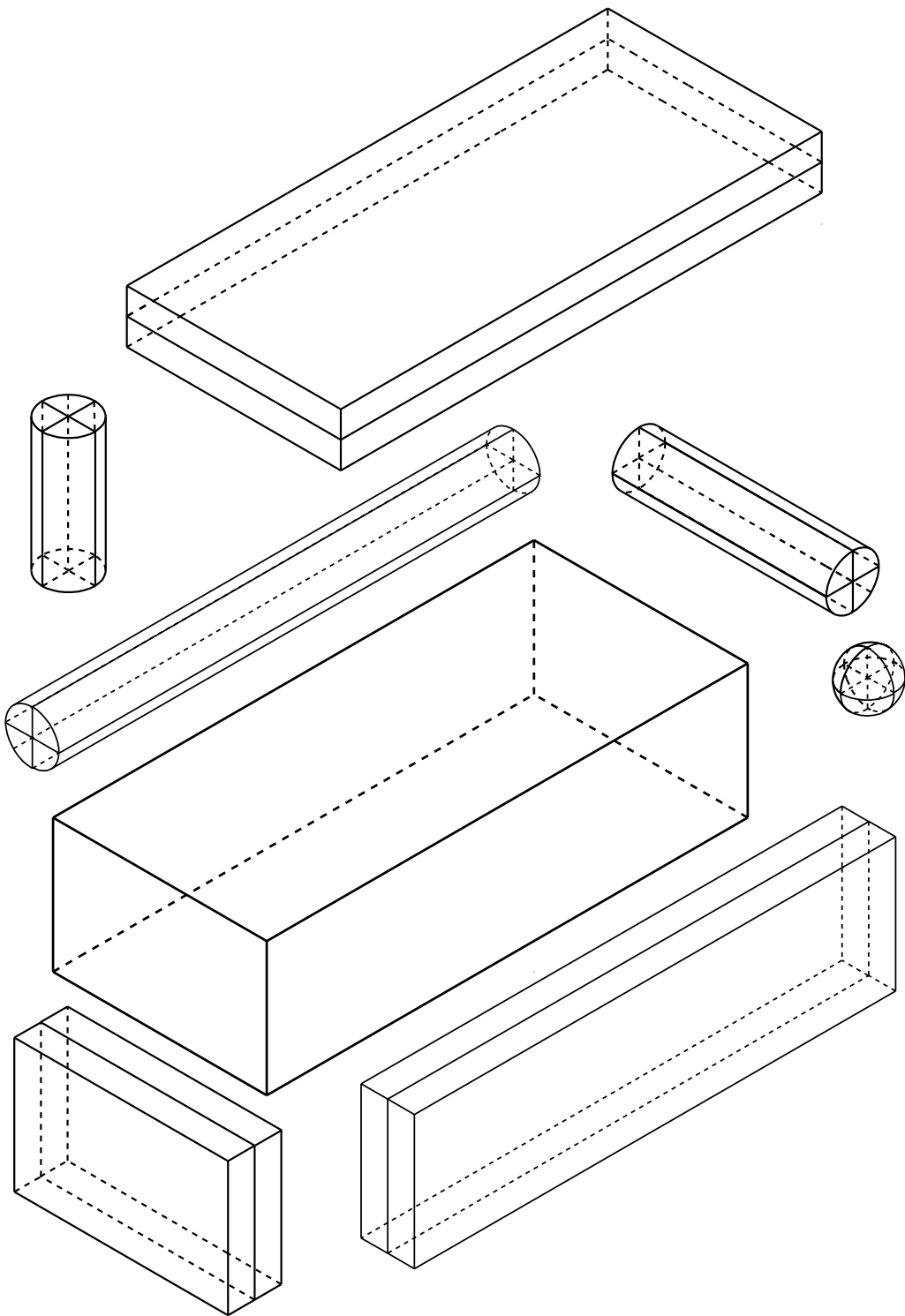


Figura 3.8: $R + \varepsilon B$ scomposto

Questo Esempio si generalizza con qualsiasi plurirettangolo di \mathbb{R}^n , e suggerisce una definizione. Consideriamo un insieme compatto $A \subset \mathbb{R}^n$. Il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(A + \varepsilon B) - V(A)}{\varepsilon},$$

non è detto che esista sempre. Tuttavia esistono sempre il limite inferiore e quello superiore.

Definizione 3.2.7 (Contenuto di Minkowski). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto. Si definisce il contenuto di Minkowski di A come

$$S(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(A + \varepsilon B) - V(A)}{\varepsilon}. \quad (3.2.1)$$

Osserviamo che la quantità a destra di (3.2.1) è ben definita dato che l'ipotesi di compattezza su A ci garantisce la compattezza di $A + \varepsilon B$, e quindi la sua misurabilità. Discutiamo ora del significato di questa definizione.

3.3 Contenuto di Minkowski e insiemi convessi

In questa sezione vogliamo dare una interpretazione del contenuto di Minkowski. I risultati che saranno forniti verranno dati soltanto come cenni omettendo le dimostrazioni, per le quali si rimanderà alla bibliografia.

Il contenuto di Minkowski di A è stato indicato con la stessa S con la quale indichiamo la superficie per un valido motivo. Abbiamo già visto nell'Esempio 3.2.5 come $S(Q)$ coincida proprio con la superficie di Q . Questo accade anche nell'Esempio 3.2.6 per R , e in generale è vero per ogni plurirettangolo di \mathbb{R}^n . Vediamo un altro esempio di questo fatto.

Esempio 3.3.1. Sia $r > 0$ e consideriamo $B_r \subset \mathbb{R}^n$. Il suo contenuto di Minkowski è

$$\begin{aligned} S(B_r) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(B_r + \varepsilon B) - V(B_r)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(B_{r+\varepsilon}) - V(B_r)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\omega_n [(r + \varepsilon)^n - r^n]}{\varepsilon} = nr^{n-1} \omega_n, \end{aligned}$$

che coincide con la superficie di B_r , in accordo con la Proposizione 1.1.5.

Quel che accade per le sfere e per i plurirettangoli non è casuale. Vediamo un'altra classe di insiemi per i quali il contenuto di Minkowski coincide con la superficie.

Definizione 3.3.2 (Politopi di \mathbb{R}^n). Un politopo di \mathbb{R}^n è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti di \mathbb{R}^n .

Osservazione 3.3.3. Due semplici osservazioni sui politopi.

- (i) I politopi di \mathbb{R}^n sono convessi per definizione.
- (ii) I politopi di \mathbb{R}^n sono compatti. Infatti un insieme finito di punti di \mathbb{R}^n è compatto, e il convessificato di un insieme compatto è a sua volta compatto, per il punto (iii) del Teorema 1.6.8.

Diamo ora la definizione di faccia di un insieme convesso, che coincide con l'idea intuitiva che si ha della faccia di un politopo.

Definizione 3.3.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una faccia di A è un sottoinsieme $B \subset A$ convesso e tale che se $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B$ con $x, y \in A$ e $\lambda \in (0, 1)$, allora $x, y \in B$.

Per i politopi vale il seguente Teorema, la cui dimostrazione è reperibile nel Capitolo 3 di [Web].

Teorema 3.3.5. *Valgono le seguenti proprietà.*

- (i) *Ogni politopo ha un numero finito di facce, ciascuna delle quali è un politopo.*
- (ii) *Dati due politopi P e Q allora $P + Q$ e λP sono ancora politopi. Di conseguenza, se P_1, \dots, P_k sono politopi, anche $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$ è un politopo.*

Il prossimo risultato ci consentirà di mettere in relazione il contenuto di Minkowski di un politopo con la sua superficie. La sua dimostrazione si trova su [Web, Chap. 6.4].

Teorema 3.3.6. *Sia P un politopo di \mathbb{R}^n e siano F_1, \dots, F_m le sue m facce $(n-1)$ -dimensionali. Sia poi u_i il versore normale esterno della faccia F_i , per ogni $i = 1, \dots, m$, e $A \subset \mathbb{R}^n$ un compatto convesso con funzione supporto h . Allora vale la formula*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V_n(P + \varepsilon A) - V_n(P)}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^m h(u_i) V_{n-1}(F_i). \quad (3.3.1)$$

Applichiamo il precedente teorema con al posto di A la sfera unitaria B . La funzione supporto di B vale identicamente 1 e quindi la (3.3.1) diventa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V_n(P + \varepsilon B) - V_n(P)}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^m V_{n-1}(F_i).$$

Il membro di sinistra è $S(P)$, cioè il contenuto di Minkowski di P , mentre quella a destra può essere definita come la superficie del politopo P : la somma dei volumi $(n-1)$ -dimensionali delle sue facce. Quindi anche per i politopi il contenuto di Minkowski equivale alla superficie.

D'altra parte, non è difficile dimostrare il seguente risultato di densità (cfr. [Web, Chap. 3]).

Lemma 3.3.7. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto compatto e convesso, allora esistono due successioni di politopi $\{P_i\}, \{Q_j\}$ tali che*

(i) $P_i \subseteq A \subseteq Q_j$ per ogni scelta di $i, j \in \mathbb{N}$,

(ii) $P_i \rightarrow A, Q_j \rightarrow A$ nella distanza di Hausdorff.

Sembra quindi ragionevole definire la superficie di un corpo convesso come il suo contenuto di Minkowski. In effetti, questa si rivela essere una buona definizione di superficie. Si può infatti dimostrare che se ∂A è sufficientemente regolare, oppure se A è un insieme convesso, allora il contenuto di Minkowski di A coincide proprio con la usuale nozione di area (si veda per esempio [BZ, p. 69]). Questo profondo risultato esula dagli scopi di questa tesi, e dunque non verrà discusso.

Vogliamo ora accennare a quelli che si chiamano i volumi intrinseci. Per parlarne abbiamo bisogno del seguente Teorema:

Teorema 3.3.8 ([Web, Theorem 6.4.3]). *Se $A_1, \dots, A_r \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi compatti e convessi, il volume della loro somma di Minkowski*

$$V(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r)$$

è un polinomio di grado n nelle indeterminate $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Indichiamo gli indici con $i(s) \in \{1, \dots, r\}$. Il coefficiente del termine $\lambda_{i(1)} \dots \lambda_{i(r)}$ dipende solo dagli insiemi $A_{i(1)}, \dots, A_{i(r)}$ e non dal loro ordine, e si indica con $V(A_{i(1)}, \dots, A_{i(r)})$. I coefficienti del polinomio V si chiamano volumi intrinseci degli insiemi A_1, \dots, A_r .

La dimostrazione di questo Teorema è molto tecnica e si basa sul fatto che i politopi sono densi negli insiemi compatti e convessi. In tal modo lo si stabilisce prima per i politopi, e poi con un argomento di densità si passa agli insiemi compatti convessi.

Osserviamo che una conseguenza immediata del Teorema è che i coefficienti che dipendono da un solo insieme coincidono il volume dell'insieme stesso, cioè

$$V(A_{i_0}) = V(A_{i_0}, \dots, A_{i_0}).$$

Per vederlo, basta porre uguale ad 1 l'indeterminata λ_{i_0} e uguali a zero tutte le altre. Vediamo ora un Esempio.

Esempio 3.3.9. Consideriamo l'insieme $Q + \varepsilon B$ dell'Esempio 3.2.5. Dato che siamo in \mathbb{R}^2 , $V(Q + \varepsilon B)$ è un polinomio di secondo grado nelle indeterminate 1 ed ε . I volumi intrinseci in questo caso sono

$$V(Q, Q) = V(Q), \quad V(Q, B) = V(B, Q) = a + b, \quad V(B, B) = V(B).$$

Se riprendiamo R dell'Esempio 3.2.6, coerentemente con il Teorema 3.3.8, $V(R + \varepsilon B)$ è un polinomio di terzo grado nelle indeterminate 1 ed ε . Infatti dai conti svolti avevamo

$$V(R + \varepsilon B) = V(R) + 2(ab + bc + ac)\varepsilon + \pi(a + b + c)\varepsilon^2 + V(B)\varepsilon^3.$$

Quindi i volumi intrinseci sono

$$V(R, R, R) = V(R), \quad V(R, R, B) = V(R, B, R) = V(B, R, R) = \frac{2}{3}(ab + bc + ac)$$

$$V(B, B, R) = V(B, R, B) = V(R, B, B) = \frac{\pi}{3}(a + b + c), \quad V(B, B, B) = V(B).$$

Nell'Esempio accade che le superfici sono multipli di un volume intrinseco

$$S(Q) = 2V(Q, B), \quad S(R) = 3V(R, R, B).$$

Come vedremo, questo non è casuale.

Consideriamo ora il volume $V(A + \varepsilon C)$. Se gli applichiamo il Teorema 3.3.8, otteniamo il seguente Corollario.

Corollario 3.3.10 (Formula di Steiner-Minkowski). *Siano $A, C \subset \mathbb{R}^n$ insiemi compatti e convessi, allora vale la formula di Steiner-Minkowski*

$$V(A + \varepsilon C) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mu_i \varepsilon^i. \quad (\text{SM})$$

Il coefficiente μ_i è

$$\mu_i = V(\overbrace{A, \dots, A}^{n-i}, \overbrace{C, \dots, C}^i),$$

cioè il volume intrinseco dove A compare $n - i$ volte e C compare i volte.

Se sviluppiamo la (SM) otteniamo

$$V(A + \varepsilon C) = V(A) + nV(\overbrace{A, \dots, A}^{n-1}, C)\varepsilon + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \mu_i \varepsilon^i,$$

e quindi

$$nV(A, \dots, A, C) = \frac{V(A + \varepsilon C) - V(A)}{\varepsilon} - \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \mu_i \varepsilon^{i-1}.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ otteniamo

$$nV(A, \dots, C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(A + \varepsilon C) - V(A)}{\varepsilon}.$$

Segue quindi la Proposizione:

Proposizione 3.3.11. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto e convesso, allora il limite inferiore nella definizione di $S(A)$ è un vero limite, e si ha che*

$$S(A) = nV(A, \dots, A, B),$$

dove B è la sfera unitaria in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Basta applicare quanto detto sopra con la sfera unitaria B al posto di C . \square

3.4 La disuguaglianza di Brunn-Minkowski e la disuguaglianza isoperimetrica

Passiamo adesso ad affrontare la disuguaglianza isoperimetrica. Il Teorema che proveremo a fine Paragrafo è il seguente.

Teorema 3.4.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto. Allora vale la disuguaglianza isoperimetrica*

$$[S(A)]^n - n^n \omega_n [V(A)]^{n-1} \geq 0. \quad (3.4.1)$$

Stabiliremo quindi una disuguaglianza isoperimetrica tra il volume di A e il suo contenuto di Minkowski. Per quanto detto nel Paragrafo precedente, se l'insieme A è anche convesso, il suo contenuto di Minkowski equivale alla sua superficie, e quindi la (3.4.1) acquista un significato geometrico di disuguaglianza tra superficie e volume, risolvendo il problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n .

Al fine di provare il Teorema 3.4.1, dimostreremo un'altra disuguaglianza che coinvolge la somma di Minkowski di due insiemi. Questa prende il nome di disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

Teorema 3.4.2 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski). *Siano $A, C \subset \mathbb{R}^n$ insiemi limitati e misurabili. Se $A + C$ è misurabile, vale la disuguaglianza*

$$V_n^{\frac{1}{n}}(A + C) \geq V_n^{\frac{1}{n}}(A) + V_n^{\frac{1}{n}}(C). \quad (\text{BM})$$

Definiamo ora gli insiemi elementari.

Definizione 3.4.3 (Insieme elementare). Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice elementare se è unione finita di plurirettangoli a due a due disgiunti, cioè se

$$A = \bigcup_{i=1}^k I_i,$$

dove gli I_i sono plurirettangoli tali che $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

L'idea per dimostrare il Teorema 3.4.2 è quella di stabilire prima la disuguaglianza (BM) per insiemi elementari, quindi ottenerla per insiemi compatti con un argomento di densità. Per fare questo avremo bisogno di due Lemmi preliminari.

Nel primo Lemma si dimostrerà che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme limitato e misurabile, è sempre possibile trovare un iperpiano coordinato di \mathbb{R}^n che divida l'insieme in modo che il volume di A alla sinistra dell'iperpiano sia uguale a θ volte il volume di A alla destra, dove θ è arbitrario.

Lemma 3.4.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e misurabile, e sia $\theta \geq 0$, allora per ogni $i = 1, \dots, n$, esiste un $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tale che*

$$V(A^-) = \theta V(A^+),$$

dove

$$A^- = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < \lambda_i\} \quad e \quad A^+ = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq \lambda_i\}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un indice $i = 1, \dots, n$. Per la limitatezza di A esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq Q$ dove

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : -a \leq x_i \leq a, \text{ per ogni } i = 1, \dots, n\}.$$

Introduciamo la funzione $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_i(x) = V(A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < x\}).$$

La f_i è monotona crescente ed è inoltre continua. Infatti se $y < x$,

$$\begin{aligned} 0 \leq f_i(y) - f_i(x) &= V(A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < y\}) - V(A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < x\}) \\ &= V(A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq x_i < y\}) \\ &\leq V(Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq x_i < y\}) \\ &= (2a)^{n-1}(y - x), \end{aligned}$$

che fornisce una stima per la continuità. Dato che f_i è continua e che $f_i(-a) = 0$, $f_i(a) = V(A)$ abbiamo che l'intervallo $[-a, a]$ viene mappato nell'intervallo $[0, V(A)]$ (per il Teorema di esistenza dei valori intermedi). Quindi per ogni $\theta \geq 0$ esiste un $\lambda_i \in [-a, a]$ tale che

$$f_i(\lambda_i) = \frac{\theta}{1 + \theta} V(A),$$

da cui segue la tesi. □

Ora è possibile dimostrare che la (BM) vale per insiemi elementari.

Lemma 3.4.5. *Se $A, C \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi elementari, per loro vale la disuguaglianza (BM).*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono $m, p \in \mathbb{N}$ tali che

$$A = \bigcup_{i=1}^m I_i, \quad C = \bigcup_{j=1}^p J_j.$$

Procediamo per induzione su $m + p$. Se $m + p = 2$ e quindi $m = 1, n = 1$, abbiamo che A e C sono plurirettangoli

$$A = S_1 \times \cdots \times S_n, \quad C = T_1 \times \cdots \times T_n$$

prodotto diretto di intervalli di \mathbb{R} di misura $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n$ rispettivamente. Per cui vale

$$\begin{aligned} V(A + C) &= V((S_1 \times \cdots \times S_n) + (T_1 \times \cdots \times T_n)) = \\ &= V((S_1 + T_1) \times \cdots \times (S_n + T_n)) = \\ &= \prod_{i=1}^n (a_i + c_i). \end{aligned}$$

Quindi in questo caso la (BM) può essere scritta come

$$\prod_{i=1}^n (a_i + c_i)^{\frac{1}{n}} \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}},$$

o equivalentemente come

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + c_i} \right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{a_i + c_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Utilizzando la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica (Teorema 1.6.24),

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

otteniamo

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + c_i} \right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{a_i + c_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + c_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_i + c_i} = 1,$$

che prova la base dell'induzione. Dimostriamo che vale il passo induttivo. Supponiamo che $m + p > 2$, e in particolare assumiamo che A sia l'unione di almeno due plurirettangoli disgiunti I_1 e I_2 . Per ipotesi abbiamo che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, e quindi esiste un iperpiano coordinato di \mathbb{R}^n che li separa. A meno di traslare l'insieme A (cosa che è possibile fare in quanto il loro volume non cambia) possiamo supporre che l'iperpiano di \mathbb{R}^n che li separa sia proprio $x_n = 0$, ovvero che

$$I_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}, \quad I_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Definiamo gli insiemi

$$A^- = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}, \quad A^+ = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Quindi

$$V(A) = V(A^-) + V(A^+).$$

Applichiamo il Lemma 3.4.4 all'insieme C con, $i = n$ e $\theta = \frac{V(A^-)}{V(A^+)}$. Dunque esiste un $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$V(C^-) = \theta V(C^+),$$

dove

$$V(C^-) = \{x \in C : x_n < \mu\}, \quad V(C^+) = \{x \in C : x_n \geq \mu\}.$$

Si ha allora

$$\frac{V(C^-)}{V(A^-)} = \frac{V(C^+)}{V(A^+)} := \alpha.$$

Osserviamo che l'insieme A^- non contiene il plurirettangolo I_2 per cui è composto al più dall'unione di $m - 1$ plurirettangoli, e lo stesso vale per A^+ . Dunque gli insiemi $A^- + C^-$ e $A^+ + C^+$ contengono al più $m + p - 1$ plurirettangoli e per loro vale la (BM) per ipotesi induttiva.

Per costruzione $A^- + C^-$ e $A^+ + C^+$ sono insiemi disgiunti. Infatti supponiamo per assurdo che esista $x \in (A^- + C^-) \cap (A^+ + C^+)$. Allora $x \in A^- + C^-$, quindi $x = a^- + c^-$ con $a^- \in A^-$ e $c^- \in C^-$. Quindi $x_n = a_n^- + b_n^- < \mu$. Analogamente ottengo $x_n \geq \mu$, e quindi un assurdo. Per la Proposizione 3.2.4

abbiamo anche che $(A^- + C^-) \cup (A^+ + C^+) \subseteq (A^- \cup A^+) + (C^- \cup C^+) = A + C$,
e quindi

$$\begin{aligned}
V(A + C) &\geq V((A^- + C^-) \cup (A^+ + C^+)) \\
&= V(A^- + C^-) + V(A^+ + C^+) \\
&\geq \left(V^{\frac{1}{n}}(A^-) + V^{\frac{1}{n}}(C^-) \right)^n + \left(V^{\frac{1}{n}}(A^+) + V^{\frac{1}{n}}(C^+) \right)^n \\
&= V(A^-) \left[\left(\frac{V(C^-)}{V(A^-)} \right)^{\frac{1}{n}} + 1 \right]^n + V(A^+) \left[\left(\frac{V(C^+)}{V(A^+)} \right)^{\frac{1}{n}} + 1 \right]^n \\
&= V(A) \left(1 + \alpha^{\frac{1}{n}} \right)^n = \left[V^{\frac{1}{n}}(A) + (\alpha V(A))^{\frac{1}{n}} \right]^n \\
&= \left(V^{\frac{1}{n}}(A) + V^{\frac{1}{n}}(C) \right)^n,
\end{aligned}$$

dato che $\alpha V(A) = \alpha V(A^-) + \alpha V(A^+) = V(C^-) + V(C^+) = V(C)$. \square

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 3.4.2.

Dimostrazione Teorema 3.4.2. Se il volume di entrambi gli insiemi è nullo la (BM) è banalmente verificata. Lo stesso vale se uno solo dei due è nullo. Siano ora A e C tali che il loro volume sia non nullo. Esistono allora $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ successioni di insiemi elementari tali che

- (i) $A_i \subseteq A$ e $C_i \subseteq C$ per ogni $i \in \mathbb{N}$,
- (ii) $V(A_i) \rightarrow V(A)$ e $V(C_i) \rightarrow V(C)$ per $i \rightarrow +\infty$.

Dal Lemma 3.4.5 e dal fatto che $(A_i + C_i) \subseteq (A + C)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$V^{\frac{1}{n}}(A + C) \geq V^{\frac{1}{n}}(A_i + C_i) \geq V^{\frac{1}{n}}(A_i) + V^{\frac{1}{n}}(C_i).$$

Passando al limite per $i \rightarrow +\infty$ in quest'ultima, otteniamo la (BM). \square

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema 3.4.1.

Dimostrazione Teorema 3.4.1. Per definizione di $S(A)$,

$$S(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(A + \varepsilon B) - V(A)}{\varepsilon}.$$

Applicando la (BM) otteniamo

$$\begin{aligned}
S(A) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left[V^{\frac{1}{n}}(A) + V^{\frac{1}{n}}(\varepsilon B) \right]^n - V(A)}{\varepsilon} \\
&= V(A) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left[1 + \varepsilon \left(\frac{\omega_n}{V(A)} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n - 1}{\varepsilon} \\
&= nV(A) \left(\frac{\omega_n}{V(A)} \right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

□

3.5 Il problema dell'unicità

Con il Teorema 3.4.1 abbiamo stabilito che la disuguaglianza isoperimetrica vale per tutti gli insiemi compatti di \mathbb{R}^n . Quel che vogliamo dimostrare adesso è la seguente affermazione:

“Se un insieme A è tale che $[S(A)]^n - n^n \omega_n [V(A)]^{n-1} = 0$ allora è una sfera”

Questa affermazione è falsa se A è un insieme compatto. Il controesempio è immediato:

Esempio 3.5.1. La sfera unitaria $B \subset \mathbb{R}^3$ soddisfa la disuguaglianza isoperimetrica con l'uguale. Consideriamo l'insieme

$$X := B \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (a, 0, 0), 2 \leq a \leq 3\}.$$

X è la sfera B alla quale viene aggiunto un segmento di lunghezza 1, che chiamiamo T . X è compatto e si ha $V(X) = V(B)$. Vediamo quanto vale il contenuto suo contenuto di Minkowski. Si ha che

$$V(X + \varepsilon B) = V((B \cup T) + \varepsilon B)$$

e per il punto (v) della Proposizione 3.2.4,

$$(B \cup T) + \varepsilon B = (B + \varepsilon B) \cup (T + \varepsilon B).$$

Se ε è abbastanza piccolo, gli insiemi $B + \varepsilon B$ e $T + \varepsilon B$ sono disgiunti, per cui vale

$$V(X + \varepsilon B) = V((B \cup T) + \varepsilon B) = V(B + \varepsilon B) + V(T + \varepsilon B).$$

Quindi dobbiamo calcolare il volume dell'intorno di raggio ε di T . Con riferimento alla Figura 3.9 si ha

$$V(T + \varepsilon B) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 + \pi\varepsilon^2.$$

Quindi, ricordando che $V(X) = V(B)$,

$$\begin{aligned} S(X) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(X + \varepsilon B) - V(X)}{\varepsilon} \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(B + \varepsilon B) - V(B)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^2 + \pi\varepsilon \right) = S(B). \end{aligned}$$

Questo prova che X soddisfa la disuguaglianza isoperimetrica con l'uguale, ma non è una sfera.

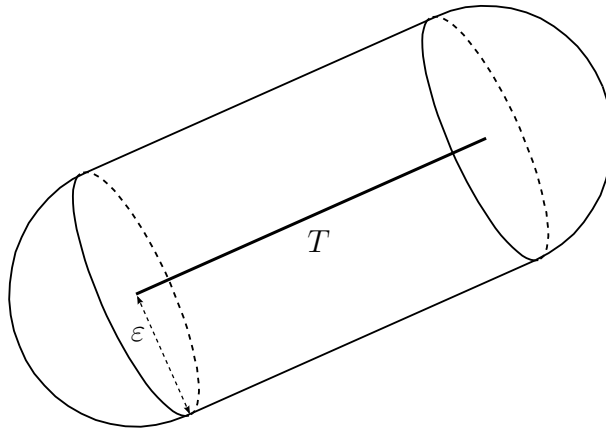


Figura 3.9: $T + \varepsilon B$

Vedendo questo Esempio si può pensare che sia sufficiente restringersi agli insiemi compatti e convessi per ottenere l'unicità. Ad un esame più attento però, i conti fatti ci dicono che anche il segmento T soddisfa la disuguaglianza isoperimetrica con l'uguale, essendo $S(T) = V(T) = 0$. Dunque abbiamo anche il controesempio di un compatto convesso che soddisfa l'isoperimetrica

con l'uguale ma non è una sfera. Sarà quindi necessaria un'ulteriore restrizione: vedremo che la classe giusta di insiemi di \mathbb{R}^n per cui vale l'unicità è quella dei corpi convessi. Possiamo ora enunciare il seguente Teorema, che dimostreremo a fine Paragrafo.

Teorema 3.5.2 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, allora vale la disuguaglianza isoperimetrica (3.4.1). Se A è un corpo convesso, vale l'uguaglianza in (3.4.1) se e solo se A è una sfera.*

Per dimostrarlo discuteremo il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Brunn-Minkowski. Per farlo avremo bisogno della definizione di insiemi omotetici.

Definizione 3.5.3 (Insiemi omotetici). Due insiemi $A, C \subset \mathbb{R}^n$ si dicono positivamente omotetici se esistono un $\lambda > 0$ e un $x \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$A = x + \lambda C.$$

A e C si dicono omotetici se sono positivamente omotetici oppure se almeno uno dei due è un singleton.

Teorema 3.5.4 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski). *Siano $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^n$ corpi convessi, e sia $0 \leq \lambda \leq 1$. Definiamo $K_\lambda := (1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1$. Allora per ogni $\lambda \in [0, 1]$ vale*

$$V^{\frac{1}{n}}(K_\lambda) \geq (1 - \lambda)V^{\frac{1}{n}}(K_0) + \lambda V^{\frac{1}{n}}(K_1). \quad (3.5.1)$$

Sussiste l'uguaglianza per qualche $\lambda \in (0, 1)$ se e solo se K_0 e K_1 sono omotetici.

Prima di passare alla dimostrazione, mostriamo che la (3.5.1) equivale alla (BM).

Proposizione 3.5.5. *Siano $A, C \subset \mathbb{R}^n$ insiemi limitati e misurabili e sia $\lambda \in [0, 1]$. Supponiamo poi che l'insieme $(1 - \lambda)A + \lambda C$ sia misurabile per ogni scelta di λ . Allora la (BM) per A e C equivale alla (3.5.1) per ogni $\lambda \in [0, 1]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni $\lambda \in [0, 1]$ valga

$$V^{\frac{1}{n}}((1 - \lambda)A + \lambda C) \geq (1 - \lambda)V^{\frac{1}{n}}(A) + \lambda V^{\frac{1}{n}}(C).$$

Scegliendo $\lambda = \frac{1}{2}$ si ottiene la (BM) per l'omogeneità del volume. Viceversa se vale la (BM), basta applicarla all'insieme limitato e misurabile $(1 - \lambda)A + \lambda C$ per ottenere la (3.5.1), sempre usando l'omogeneità del volume. \square

Dimostrazione del Teorema 3.5.4. Poiché K_0 e K_1 sono compatti, anche K_λ è compatto, per il punto (iii) della Proposizione 3.2.4. Quindi per K_λ vale la (BM) e per quanto detto nella Proposizione 3.5.5, questa equivale alla (3.5.1).

Passiamo ora alla dimostrazione dell'unicità. Proveremo dapprima il Teorema nell'ipotesi che $V(K_0) = V(K_1) = 1$. In questo caso la (3.5.1) diventa

$$V(K_\lambda) \geq 1. \tag{3.5.2}$$

Procediamo per induzione sulla dimensione. La base dell'induzione $n = 1$ è banale. Supponiamo che il Teorema sia vero per $n - 1$ e proviamolo per n . Sia $u \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|u\| = 1$ un arbitrario versore normale alla sfera unitaria di \mathbb{R}^n . Utilizziamo delle notazioni per indicare gli iperpiani normali ad u e i rispettivi semispazi:

$$H(\alpha) := H_{u,\alpha}, \quad H^-(\alpha) := H_{u,\alpha}^-.$$

Indichiamo poi le immagini di u tramite le funzioni supporto dei K_λ come

$$\alpha_\lambda := -h(K_\lambda, -u), \quad \beta_\lambda := h(K_\lambda, u).$$

Sia $\zeta \in \mathbb{R}$, definiamo per $i = 0, 1$,

$$\begin{aligned} v_i(\zeta) &:= V_{n-1}(K_i \cap H(\zeta)), \\ w_i(\zeta) &:= V_n(K_i \cap H^-(\zeta)). \end{aligned}$$

Dato che la funzione v_i è nulla per $\zeta < \alpha_i$ abbiamo che

$$w_i(\zeta) = \int_{\alpha_i}^{\zeta} v_i(t) dt.$$

Per la continuità della v_i , la w_i è derivabile nell'intervallo (α_i, β_i) . Inoltre è strettamente crescente, infatti:

$$w'_i(\zeta) = v_i(\zeta) > 0.$$

Dunque la w_i è invertibile in (α_i, β_i) . Indichiamo l'inversa con

$$z_i: (0, 1) \rightarrow (\alpha_i, \beta_i).$$

Abbiamo che per $\tau \in (0, 1)$ si ha

$$z'_i(\tau) = \frac{1}{w'_i(z_i(\tau))} = \frac{1}{v_i(z_i(\tau))}.$$

Siano per $i = 0, 1$,

$$\begin{aligned} K_i(\tau) &:= K_i \cap H(z_i(\tau)), \\ z_\lambda &:= (1 - \lambda)z_0(\tau) + \lambda z_1(\tau). \end{aligned}$$

Per queste definizioni vale l'inclusione

$$(1 - \lambda)K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau) \subseteq K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau)).$$

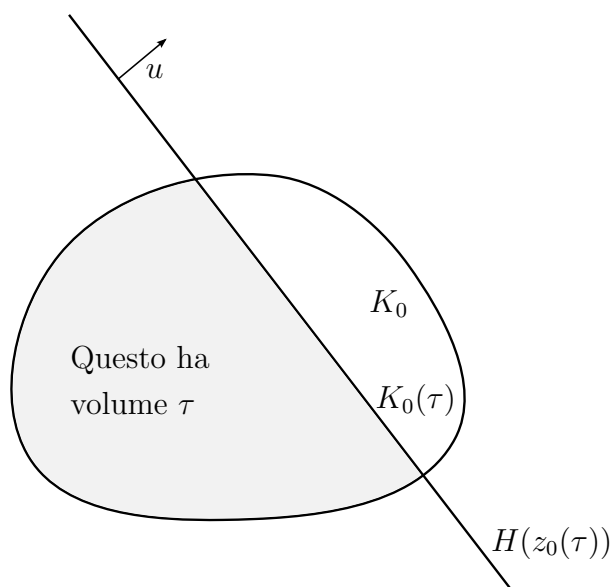


Figura 3.10: Teorema 3.5.4

A questo punto, il volume di K_λ può essere scritto come

$$V_n(K_\lambda) = \int_{\alpha_\lambda}^{\beta_\lambda} V_{n-1}(K_\lambda \cap H(\zeta)) d\zeta.$$

Se effettuiamo il cambio di variabile $\zeta = z_\lambda(\tau)$ e sfruttiamo l'inclusione precedente otteniamo

$$\begin{aligned} V_n(K_\lambda) &= \int_0^1 V_{n-1}(K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau))) z'_\lambda(\tau) d\tau \\ &\geq \int_0^1 V_{n-1}((1-\lambda)K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau)) z'_\lambda(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 V_{n-1}((1-\lambda)K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau)) \left[\frac{1-\lambda}{v_0(z_0(\tau))} + \frac{\lambda}{v_1(z_1(\tau))} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva si ha

$$V_{n-1}((1-\lambda)K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau)) \geq \left[(1-\lambda)V_{n-1}^{(\frac{1}{n-1})}(K_0(\tau)) + \lambda V_{n-1}^{(\frac{1}{n-1})}(K_1(\tau)) \right]^{n-1}.$$

Poiché per $i = 0, 1$ vale

$$V_{n-1}(K_i(\tau)) = V_{n-1}(K_i \cap H(z_i(\tau))) = v_i(z_i(\tau)),$$

allora

$$V_n(K_\lambda) \geq \int_0^1 \left[(1-\lambda)v_0^{(\frac{1}{n-1})} + \lambda v_1^{(\frac{1}{n-1})} \right]^{n-1} \left[\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right] d\tau,$$

dove abbiamo abbreviato $v_i(z_i(\tau))$ con v_i . Applicando il Teorema 1.6.25 l'integrando soddisfa

$$\left[(1-\lambda)v_0^{(\frac{1}{n-1})} + \lambda v_1^{(\frac{1}{n-1})} \right]^{n-1} \left[\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right] \geq 1, \quad (3.5.3)$$

per ogni $\lambda \in (0, 1), \tau \in [0, 1]$. Se ora supponiamo che per qualche $\lambda \in (0, 1)$ valga

$$V_n(K_\lambda) = 1,$$

questo è vero se e solo se le disuguaglianze che coinvolgono $V_n(K_\lambda)$ valgono tutte con l'uguale. In particolare quindi deve valere

$$\int_0^1 \left[(1-\lambda)v_0^{(\frac{1}{n-1})} + \lambda v_1^{(\frac{1}{n-1})} \right]^{n-1} \left[\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right] d\tau = 1.$$

Essendo la funzione integranda non inferiore ad 1, questo implica che la (3.5.3) vale con l'uguale per ogni $\tau \in (0, 1)$. Di nuovo il Teorema 1.6.25 ci dice che questo è vero se e solo se

$$v_0(z_0(\tau)) = v_1(z_1(\tau)), \text{ per ogni } \tau \in (0, 1).$$

Poiché $v_i(z_i(\tau)) = [z'_i(\tau)]^{-1}$,

$$z'_0(\tau) = z'_1(\tau), \text{ per ogni } \tau \in (0, 1),$$

cioè la funzione $z_0 - z_1$ è costante in $(0, 1)$. Dimostriamo che questa costante è nulla. Dato che i volumi sono invarianti per traslazioni, possiamo supporre che per $i = 0, 1$, l'insieme K_i abbia il baricentro nell'origine, ovvero che

$$\int_{K_i} x \, dx = 0.$$

Ma allora

$$\int_{K_i} \langle x, u \rangle \, dx = 0.$$

Svolgiamo l'integrale a sinistra parametrizzando il dominio d'integrazione come

$$K_i = \{(\zeta, x) : \zeta \in (\alpha_i, \beta_i), x \in K_i(\zeta)\},$$

ovvero scrivendo K_i come l'unione di tutte le sezioni $K_i \cap H(\zeta)$. Se $x \in K_i(\zeta)$ allora $x \in H(\zeta)$ e quindi $\langle x, u \rangle = \zeta$. In tal modo otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K_i} \langle x, u \rangle \, dx = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{K_i} \langle x, u \rangle \, dx d\zeta \\ &= \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \zeta \int_{K_i \cap H(\zeta)} dx d\zeta = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} V_{n-1}(K_i \cap H(\zeta)) \zeta \, d\zeta \\ &= \int_{\alpha_i}^{\beta_i} v_i(\zeta) \zeta \, d\zeta. \end{aligned}$$

Se nell'ultimo integrale effettuiamo il cambiamento di variabile $z_i(\tau) = \zeta$ e ricordiamo che $z'_i(\tau) = \frac{1}{v_i(\zeta)}$, otteniamo

$$\int_0^1 z_i(\tau) \, d\tau = 0.$$

Allora integrando per $\tau \in (0, 1)$ l'equazione

$$z_0(\tau) - z_1(\tau) = C,$$

si ottiene che $C = 0$, ovvero che $z_0(\tau) = z_1(\tau)$ per ogni $\tau \in (0, 1)$. In particolare abbiamo che gli intervalli immagine sono uguali, e quindi sono uguali gli estremi, cioè $\beta_0 = \beta_1$. Allora

$$h(K_0, u) = \beta_0 = \beta_1 = h(K_1, u).$$

Per l'arbitrarietà di u segue che K_0 e K_1 hanno la stessa funzione supporto. Ma tale funzione identifica univocamente un insieme non vuoto compatto e convesso (Teorema 1.6.17) e quindi $K_0 = K_1$. In particolare quindi, sono omotetici.

Consideriamo ora il caso generale dei corpi convessi K_0 e K_1 con volume arbitrario. Dobbiamo ricondurci al caso precedente. Per farlo, definiamo

$$\bar{K}_0 = \frac{K_0}{V^{\frac{1}{n}}(K_0)}, \quad \bar{K}_1 = \frac{K_1}{V^{\frac{1}{n}}(K_1)},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda V^{\frac{1}{n}}(K_1)}{(1 - \lambda)V^{\frac{1}{n}}(K_0) + \lambda V^{\frac{1}{n}}(K_1)}.$$

Dato che $\bar{\lambda} \in [0, 1]$ e che $V(\bar{K}_0) = V(\bar{K}_1) = 1$, dalla (3.5.2) otteniamo

$$V((1 - \bar{\lambda})\bar{K}_0 + \bar{\lambda}\bar{K}_1) = V(\bar{K}_{\bar{\lambda}}) \geq 1. \quad (3.5.4)$$

Sostituendo i valori e svolgendo i calcoli, si vede che la (3.5.4) è equivalente alla (3.5.1). Supponiamo allora che valga l'uguaglianza nella (3.5.1). Allora anche la (3.5.4) vale con l'uguale. Per quanto dimostrato, questo implica che $\bar{K}_0 = \bar{K}_1$, ovvero

$$K_0 = \mu K_1,$$

con $\mu = \left(\frac{V(K_0)}{V(K_1)}\right)^{\frac{1}{n}}$. Dunque se la (3.5.1) vale con l'uguale, K_0 e K_1 sono positivamente omotetici. \square

Un Corollario della disuguaglianza di Brunn-Minkowski scritta nella forma (3.5.1) è il seguente.

Corollario 3.5.6. *Siano $A, C \subset \mathbb{R}^n$ insiemi limitati e misurabili, e sia $\lambda \in [0, 1]$. Supponiamo poi che l'insieme $(1 - \lambda)A + \lambda C$ sia limitato e misurabile per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Allora la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(t) = V^{\frac{1}{n}}((1 - t)A + tC)$$

è concava.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica. Siano $x, y, \lambda, \mu \in [0, 1]$ tali che $\lambda + \mu = 1$, allora

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= V^{\frac{1}{n}}((1 - \lambda x - \mu y)A + (\lambda x + \mu y)C) \\ &= V^{\frac{1}{n}}(\lambda[(1 - x)A + xC] + \mu[(1 - y)A + yC]) \\ &\geq \lambda V^{\frac{1}{n}}((1 - x)A + xC) + \mu V^{\frac{1}{n}}((1 - y)A + yC) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

□

Naturalmente il Corollario 3.5.6 vale anche nell'ipotesi in cui $A, C \subset \mathbb{R}^n$ sono corpi convessi. Una conseguenza del fatto che la f è concava è la seguente disuguaglianza.

Teorema 3.5.7 (Prima disuguaglianza di Minkowski). *Siano $A, C \subset \mathbb{R}^n$ corpi convessi, allora vale la disuguaglianza*

$$V(A, \dots, A, C)^n \geq V^{n-1}(A)V(C). \quad (3.5.5)$$

Vale l'uguaglianza in (3.5.5) se e solo se A e C sono omotetici.

Dimostrazione. Introduciamo la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = V^{\frac{1}{n}}((1 - t)A + tC).$$

Il Corollario 3.5.6 ci dice che f è concava. Dimostreremo che è anche derivabile in 0: in questo modo si ha che la f deve soddisfare la condizione

$$f'(0) \geq f(1) - f(0),$$

che equivale alla (3.5.5). Proviamo questi fatti. Poiché A e C sono convessi, dal Corollario 3.3.10 si ha

$$nV(A, \dots, A, C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(A + \varepsilon C) - V(A)}{\varepsilon}.$$

Se ora sostituiamo $\varepsilon = \frac{t}{1-t}$ otteniamo

$$\begin{aligned} nV(A, \dots, A, C) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - (1-t)^n V(A)}{t(1-t)^{n-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - (1-t)^n V(A)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - (1-t)^n V(A) + V(A) - V(A)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - V(A)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V(A)[1 - (1-t)^n]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - V(A)}{t} + nV(A). \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata di f in 0:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{d}{dt} \left[V^{\frac{1}{n}}((1-t)A + tC) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{n} V^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}((1-t)A + tC) \Big|_{t=0} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{V((1-t)A + tC) - V(A)}{t} \\ &= \frac{1}{n} [V(A)]^{\frac{1-n}{n}} [nV(A, \dots, A, C) - nV(A)] \\ &= \frac{V(A, \dots, A, C) - V(A)}{[V(A)]^{\frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

Poiché la f è concava, $-f$ è convessa e quindi applicando il Teorema 1.6.21 con $a = 0$, otteniamo che la funzione

$$g(t) := \frac{-f(t) + f(0)}{t}$$

è crescente in $(0, 1]$. Quindi $g(t) \leq g(1)$, per ogni $t \in (0, 1]$ ed equivalentemente

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} \geq f(1) - f(0), \text{ per ogni } t \in (0, 1]. \quad (3.5.6)$$

Se passiamo al limite per $t \rightarrow 0^+$ otteniamo

$$f'(0) \geq f(1) - f(0) \quad (3.5.7)$$

e sostituendo i valori di f e della derivata calcolata, si vede che equivale alla (3.5.5), che è quindi verificata.

Supponiamo adesso che la (3.5.5) valga con l'uguale. Allora vale con l'uguale la (3.5.7) e la (3.5.6) diventa

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} \geq f'(0), \text{ per ogni } t \in (0, 1]. \quad (3.5.8)$$

Dato che f è concava in $[0, 1]$, la (3.5.8) non può valere con il minore stretto, e quindi sostituendo $f'(0) = f(1) - f(0)$ abbiamo l'identità

$$f(1) - f(0) = \frac{f(t) - f(0)}{t}, \text{ per ogni } t \in (0, 1].$$

Se ora sostituiamo in quest'ultima i valori di f otteniamo

$$V_n^{\frac{1}{n}}(C) - V_n^{\frac{1}{n}}(A) = \frac{V_n^{\frac{1}{n}}((1-t)A + tC) - V_n^{\frac{1}{n}}(A)}{t},$$

ovvero

$$V_n^{\frac{1}{n}}((1-t)A + tC) = (1-t)V_n^{\frac{1}{n}}(A) + tV_n^{\frac{1}{n}}(C),$$

cioè la (3.5.1) con l'uguaglianza. Questo implica che A e C sono omotetici. \square

A questo punto la disuguaglianza isoperimetrica segue come semplice applicazione della prima disuguaglianza di Minkowski.

Dimostrazione Teorema 3.5.2. La prima parte del teorema è già stata dimostrata nel precedente paragrafo. Occupiamoci dell'unicità. Per ipotesi A è un corpo convesso, dunque possiamo applicare la prima disuguaglianza di Minkowski al volume $V(A, \dots, A, B)$, dove B è la sfera unitaria. Otteniamo:

$$V(A, \dots, A, B)^n \geq V(A)^{n-1}V(B). \quad (3.5.9)$$

Ricordiamo ora che $V(B) = \omega_n$ e che la Proposizione 3.3.11 ci dice che

$$S(A) = nV(A, \dots, A, B).$$

Quindi la (3.5.9) è proprio la disuguaglianza isoperimetrica (3.4.1) e allora se vale l'uguale in (3.4.1), vale anche in (3.5.9). Per il Teorema 3.5.7 questo è vero se e solo se A e B sono omotetici, cioè se e solo se A è una sfera. \square

Bibliografia

- [Ahl] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1979.
- [Bec] E. T. Beckenbach. The Stronger Form of Cauchy's Integral Theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(8):615–618, 1943.
- [Blå] Viktor Blåsjö. The Isoperimetric Problem. *The American Mathematical Monthly*, 112(6):526–566, 2005.
- [Bre] Håim Brezis. *Analisi Funzionale: Teoria e Applicazioni*. Liguori Editore, 1986.
- [BZ] Y. Dmitrevich Burago and Viktor Abramovich Zalgaller. *Geometric Inequalities*. Springer-Verlag, 1988.
- [Car] Torsten Carleman. Zur Theorie der Minimalflächen. *Mathematische Zeitschrift*, pages 154–160, 1918.
- [Con1] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, second edition, 1978.
- [Con2] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable II*. Springer-Verlag, 1995.
- [Dac] Bernard Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, 2004.
- [DB] Gar De Barra. *Measure Theory and Integration*. Ellis Horwood Limited, 1981.
- [Dur] Peter L. Duren. *Univalent Functions*. Springer-Verlag, 1983.

- [Gar] R. J. Gardner. The Brunn-Minkowski Inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(8):355–405, 2002.
- [Giu] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, 2003.
- [Oss] Robert Osserman. The Isoperimetric Inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(6):1182–1238, 1978.
- [Sch] Rolf Schneider. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [Web] Roger Webster. *Convexity*. Oxford University Press, 1994.