University of Graz
Institute of Mathematics and Scientific Computing

Dipl.-Ing. Andreas Habring
andreas.habring@uni-graz.at

Analysis 3 - Exercise Sheet 12

Publication date: January 18, 2023

Due date: January 25, 2023

Exercise 12.1 (20 pts) Seien M, N eingebettete, reguläre, lokal parametrisierte Flächen und $F : M \to N$ differenzierbar. Wir betrachten die Ableitung von F als lineare Abbildung analog zur Ableitung im $\mathbb{R}^d$. Die Ableitung $DF(p) : T_pM \to T_qN$ für $p \in M$, $q = F(p)$ sei wie folgt definiert: Sei $w \in T_pM$ und γ Kurve in U mit $\gamma(0) = x$, sodass $w = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)|_{t=0}$. Definiere $DF(p)(w) \coloneqq \frac{d}{dt} F \circ f \circ \gamma(t)|_{t=0}$. Beweise, dass $DF(x)$ wohldefiniert, insbesondere auch unabhängig von der Parametrisierung f und der Kurve γ, und linear ist.

Exercise 12.2 (20 pts) Beweisen Sie die Kettenregel für zwei hintereinander ausgeführte Abbildungen zwischen erklpf.

Exercise 12.3 (20 pts) Sei $F : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei erklpf.

- Sei F die Einschränkung einer linearen Abbildung $\bar{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\bar{F}(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Berechnen Sie $DF(p)w$ für beliebieges $p \in M$ und $w \in T_pM$.
- F^{-1} existiere und sei differenzierbar. Stelle $D(F^{-1})$ in geeigneter Weise durch F, DF dar.

Exercise 12.4 (20 pts) Seien $0 < r_1, r_2 < R$ und S_1, S_2 die Tori gegeben durch

$$f_i(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} (R + r_i \cos(\phi)) \cos\psi \\ (R + r_i \cos(\phi)) \sin\psi \\ r_i \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad (\phi, \psi) \in [0, 2\pi)^2, \quad i = 1, 2.$$

Definiere $F : S_1 \to S_2$ über $f_1(\phi, \psi) \mapsto f_2(\phi, \psi)$. Bestimmen Sie für ein $x = f_1(\phi, \psi)$, $(\phi, \psi) \in (0, 2\pi)^2$ die Matrixdarstellung von DF bzgl. der Parametrisierungen f_i.

Exercise 12.5 (20 pts) Sei M das Ellipsoid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1\}$$

für $a, b, c > 0$. Wir wissen vom letzten Übungszettel, dass $F : M \to S^2$, $F(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}})$ ein Diffeomorphismus ist. Berechne die Ableitung von F.