University of Graz
Institute of Mathematics and Scientific Computing

Dipl.-Ing. Andreas Habring
andreas.habring@uni-graz.at

Analysis 3 - Exercise Sheet 10

Publication date: Dezember 14, 2022 Due date: January 11, 2022

Wie besprochen, die zwei letzten Beispiele vom 8. Übungszettel noch mal.

Exercise 10.1 (20 pts) Sei $M = f^{-1}(0)$ eine erklpf im $\mathbb{R}^2$ mit der Dimension 1, wobei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit 0 als regulärem Wert ist (d.h., $Df(x)$ hat vollen rang für alle x mit $f(x) = 0$) und $(0,0) \notin M$. Zeige, dass

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$$

eine 2-dimensionale erklpf des $\mathbb{R}^3$ ist. Veranschauliche dieses Resultat am Beispiel eines Torus.

Exercise 10.2 (20 pts) Sind die folgenden Mengen erklpf? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Die Ebene als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

b) Die Sphäre S^n als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Die n-dimensionale Sphäre als Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ für $m > n+1$, das heißt, $S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n\}$.

d) Die linke Menge in Figure 1 im $\mathbb{R}^2$.

e) Die rechte Menge in Figure 1 im $\mathbb{R}^2$.

Figure 1: Erklpf?

Exercise 10.3 (20 pts) Sei $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und definiere

$$\iota_N : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \iota_N(x) = N + \frac{2}{\|x - N\|_2^2}(x - N)$$

und die stereographische Projektion

$$\sigma_N : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}, \quad \sigma_N(x) = \iota_N(x, 0)$$

mit der n-dimensionalen Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass σ_N eine Parametrisierung von $S^n \setminus \{N\}$ ist. Fertigen Sie Skizzen für n=1,2 an. Das heißt:

a) Zeigen Sie, dass σ_N surjektiv ist. Fertigen Sie eine Skizze an, um zu sehen, wie sie für $y \in S^n$ das passende x finden, sodass $\sigma_N(x) = y$.

b) Zeigen Sie, dass σ_N injektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix von σ_N injektiv ist. Die Jacobimatrix kann recht schön vereinfacht werden.

Dr. Silvio Fanzon
silvio.fanzon@uni-graz.at

Exercise 10.4 (20 pts) Bestimmen Sie die Tangentialräume von $S^n \setminus \{N\}$ mithilfe der Parametrisierung aus 10.3.

Exercise 10.5 (20 pts) Sei die Hyperfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ der Graph einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Erstellen Sie eine Gleichung für die Punkte (x, y, z) der Tangentialebene in $(x0, y0, z0) \in S$ mittels der partiellen Ableitungen von g.